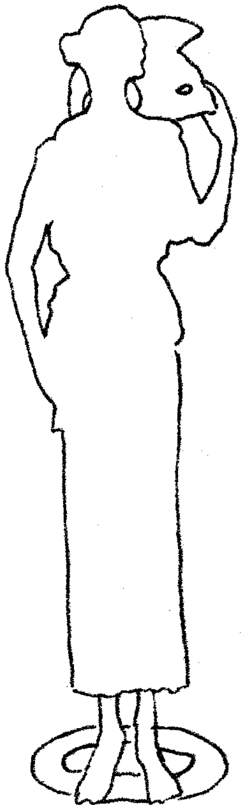
幾何学ノートNO. 1



幾何の生いたち。

（幾何学的な考えは，どのように展開してきたか）

1967.2.8.

桑名市本郷，アテネ会館

アテネ会　西塚茂雄

はじめに。

図形の学問ー幾何学ーをすじみちを立てて学ぶには，定義，定理が大切です。皆さんが中学で学ぶ幾何学は，図形を書いて，見て，なるほどと感心するような学び方で，理解されるのです。

ところが，大学への進学を希望する皆さんには，このすじみちを立てて学ぶことを，なるべくはやくからはじめた方がよいと考えます。

ここに集めました定義・定理・問題は，矢野健太郎著"図形の生いたち"（絶版）から，アテネの先輩たちと拾いだしてまとめたものです。

なお，誤りや改めるところがありましたら申しでて下さい。訂正して，より完全なものにして，あとにつづく人たちにおくりたいと思います。

1967.2.10　　西塚　茂雄

定理の歴史的な大分け。

私は，ただいま，すじみちを立てて学ぶことを強調しました。しかし，他方，歴史を通して学ぶことも大切なのです。この，２つの見方を通して，数学という学問が，理解され，はぐくまれ，成長するのだと信じます。

I. イオニア学派（タレス 前640〜546）
〔定理1〕から〔定理17〕

II. ピタゴラス学派（ピタゴラス前580〜500）
〔定理18〕から〔定理54〕

III. ソフィスト一派（サラミス湾の海戦前480）
〔定理55〕から〔定理77〕

IV. プラトン学派（プラトン前428〜347）
〔定理78〕から〔定理85〕

V. アレクサンドリア学派（ユークリッド前300，アルキメデス287〜212）
〔定理86〕から〔定理95〕

☆ 数学をすじみちをたてて学ぶための規則

自同律：$a = a$

対称律：$a = b \rightarrow b = a$

推移律：$\left.\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right\} \rightarrow a = c$

寄算の一意性：$a = b$
$$\downarrow$$
$$a + c = b + c$$

掛算の一意性：$a = b$
$$\downarrow$$
$$ac = bc$$

寄算の交換法則：$a + b = b + a$

掛算の交換法則：$ab = ba$

寄算の結合法則：$(a+b)+c = a+(b+c)$

掛算の結合法則：$(ab)c = a(bc)$

配分法則：$(a+b)c = ac + bc$

引算の意味：$(a-b)+b = a$

割算の意味：$(a \div b) \times b = a$

引算の一意性：$a + c = b + c$
$$\downarrow$$
$$a = b$$

割算の一意性：$ac = bc \quad (c \neq 0)$
$$\downarrow$$
$$a = b$$

命題 ― 本命題・逆・対偶・裏 ―

(1) 命題 “A ならば B” $A \rightarrow B$

という形でのべられたことがらをいう。

(2) 逆 “B ならば A” $B \rightarrow A$

という命題を(1)の逆，又は逆命題という。

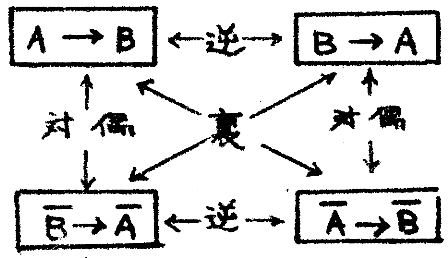
(3) 対偶 “B でなければ A でない” $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$

という命題を(1)の対偶命題という。

(4) 裏 “A でなければ B でない.” $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$

という命題を(1)の裏命題という。

関係図示



本命題が真であれば、対偶命題は必ず真である。

定　義

直　線：両方にまっすぐにのびた線.

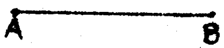
直線l．一般に文字l, m を使う

直線上の2点を押えて．直線AB とよぶ．

半直線：一方にまっすぐにのびた線.

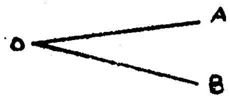
半直線AB.

線　分：直線の一部分



線分AB.

角　：一点から2つの半直線のでている図形



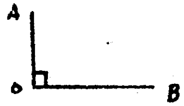
角AOB

O：角の頂点.

角の大きさ：角を作る2つの半直線の一方を他方に重ねる回転の大きさ.

平　角：角を作る2つの半直線が，頂点の両側に一直線になった角．又は角の大きさ.

直　角：平角の半分をいう.



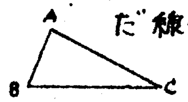
直角の大きさをあらわすのに，

∠AOB ＝ ∠R

とかく．R：Right angle.

従って，平角の大きさは，2∠Rである.

3角形：一直線上にない3点と，これらを2つずつ結んだ線分とからできている図形.

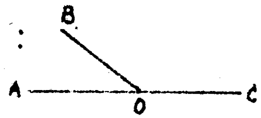


△ABC：図形　$S_{\triangle ABC}$：面積

鋭　角：直角より小さい角.

鈍　角：直角より大きく2直角より小さい角.

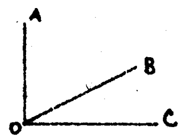
補　角：



2つの角の和が2直角であるとき

∠AOB と∠BOC とは補角をなすという.

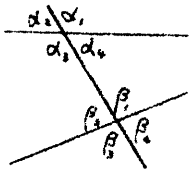
余　角：



2つの角の和が1直角のとき2つの角は互に余角をなすという．∠AOBの余角は∠BOCである.

正3角形：3つの辺の長さの等しい3角形。

同位角
錯　角
同傍内角：
同傍外角

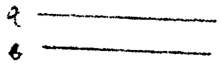


α_1 と β_1，α_2 と β_2，α_3 と β_3，α_4 と β_4：互に同位角。

α_3 と β_1，α_4 と β_2：互に錯角。

α_4 と β_1，α_3 と β_2：互に同傍内角。
α_1 と β_4，α_2 と β_3：互に同傍外角。

平　行：



$a \parallel b$

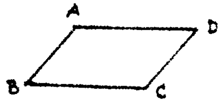
右でも左でも交わらない2つの直線は互に平行であるという。

逆：命題の条件の一部と結論とを入れかえた命題をもとの命題の逆又は逆命題という。

転換法：命題の一群があって，これらの命題の条件が，起りうるすべての場合をつくし，その結論が互に相容れなければ，その逆命題も真である。

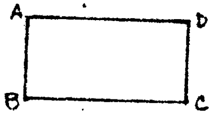
正n角形：すべての辺の長さが相等しく，すべての角の相等しいn角形。

平行4辺形：2組の相対する辺の平行な4辺形



▱ABCD とかく。

矩　形：長方形ともいう。1つの角が1∠Rである平行4辺形。

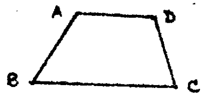


□ABCD 又は □AC とかく。

菱　形：相隣る1組の辺の長さの相等しい平行4辺形。4辺の長さの等しい4辺形。

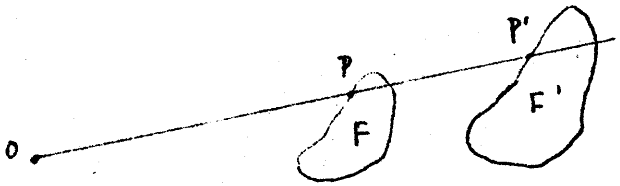
正方形：相隣る1組の辺の長さの等しい矩形。

梯　形：1組の相対する辺の平行な4辺形。



⏢ABCD とかく。

相似の位置：
相似形
2つの図形F, F'において，対応する2点P, P'を結ぶ直線が，つねに1点Oを通り，OP：OP' がP, P'の位置に関係なく，つねにconstantであるならば，FとF'とは相似の位置にあるという。



O：相似の中心，比：相似比

また，2つの図形F：F'とを，適当に移動して相似の位置におくことができるときFとFとは相似であるといって

$$F \backsim F'$$

とかく。

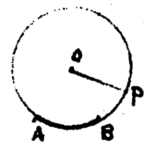
黄金分割：(Golden section) 中末比，中外比ともいう。

線分ABの内分点Pが

$$AP^2 = PB \cdot AB$$

を満足するときPはABを黄金分割するという。

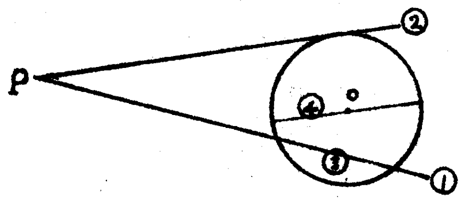
円：1定点から等距離にある点の軌跡。



O：円の中心
OP：円の半径

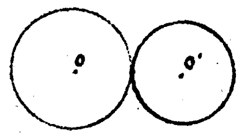
弧：円周の1部分．$\overset{\frown}{AB}$ とかく。

割線：円と2点で交わる直線 …… ①
接線：円と1点で交わる直線 …… ②
弦：割線の円内の部分 …… ③
直径：中心を通る弦 …… ④

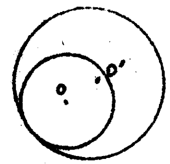


2円が接する：2つの円が只だ1点のみを共有するとき。

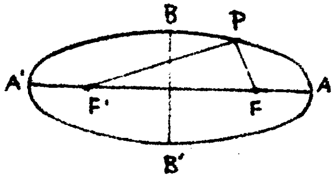
（外接）



（内接）



楕　　円：2定点にいたる距離の和が一定な点の軌跡。



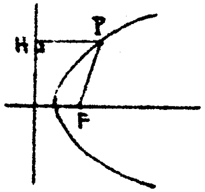
F, F'：焦点

AA'：長軸

BB'：短軸

$$PF + PF' = const.$$

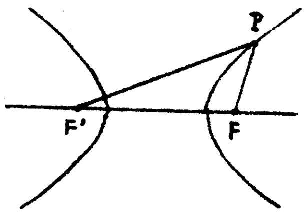
放　物　線：〔抛物線〕1定点と1定直線にいたる距離の等しい点の軌跡。



$PH = PF$

F：焦点

双　曲　線：2点定にいたる距離の差の一定な点の軌跡



$$PF' - PF = const.$$

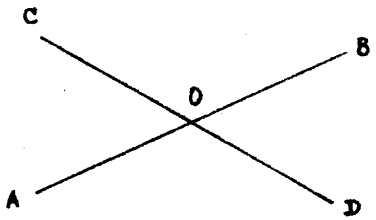
1 イオニア学派（Thales 640～546 B.C）

ギリシアの植民地として最初に栄えたのは，イオニア植民地であります。植民地の繁栄に応じて学問も発達し，数学，哲学，科学が生れました。

哲学史では，ギリシアの植民地イオニア地方に起った最初の自然哲学者のグループを広く，イオニア学派とよんでいますが，そのうち一都市ミレトスに生れた Thales, Anaximandros (610～546 B.C) および Anaximenes (585～528 B.C) を一団として，特にミレトス学派とよんでいます。

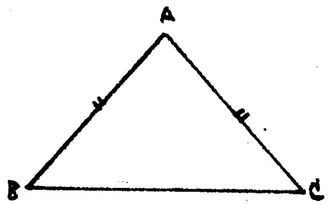
このミレトス哲学者たちの宇宙観はきわめて素朴で美しいものでした。タレスによると，大地は大洋に浮く1個の円盤でありました。そして，水こそ万物の根源的要素であると考えました。氷も霜も雪もたちに水となり，岩でも水に洗われると減少ししてついには消えてしまう。人間もまた水に帰り，反対に海陸の水もかたまって固体になると思われました。水は蒸発して空気になり水がはげしく動いて地震が起ると考えました。星はその沈んでから現われるまでの間，大地のうら側を通っているのだという考えをもっていました。

〔定理1〕 対頂角は相等しい。



$$AB \cap CD = O \longrightarrow \begin{cases} \angle AOD = \angle BOC \\ \angle DOB = \angle COA \end{cases}$$

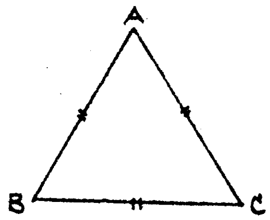
〔定理2〕 2等辺3角形の両底角は相等しい。



$\triangle ABC$ において.

$$AB = AC \longrightarrow \angle B = \angle C$$

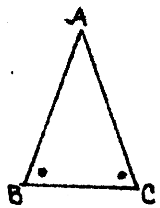
〔定理2〕系 正3角形の3つの(内)角は相等しい。



$\triangle ABC$ において,

$$\left.\begin{matrix} AB = BC \\ BC = CA \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \angle C = \angle A \\ \angle A = \angle B \end{cases}$$

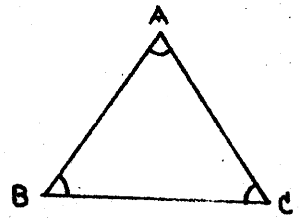
〔定理3〕 3角形において, 2つの角が相等しければ2等辺3角形である。



$\triangle ABC$ において,

$$\angle B = \angle C \rightarrow AB = AC$$

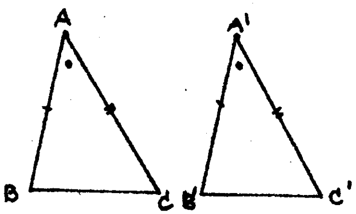
〔定理3〕系　3つの内角の相等しい3角形は，正3角形である。



$\triangle ABC$ において，

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle B\\ \angle B=\angle C\end{array}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}CA=BC\\ AB=CA\end{array}\right.$$

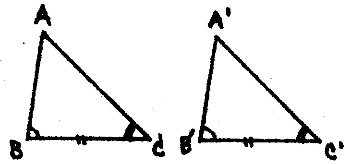
〔定理4〕　2つの3角形において，1つの(内)角とそれをはさむ2辺とがそれぞれ相等しければ，これら2つの3角形は合同である。(辺角辺の合同)



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}AB=A'B'\\ \angle A=\angle A'\\ AC=A'C'\end{array}\right\}\longrightarrow\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

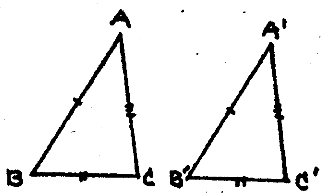
〔定理5〕　2つの3角形において，1つの辺とその両端の(内)角が，それぞれ相等しければ，これら2つの3角形は合同である。(角辺角の合同)



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=\angle B'\\ BC=B'C'\\ \angle C=\angle C'\end{array}\right\}\longrightarrow\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

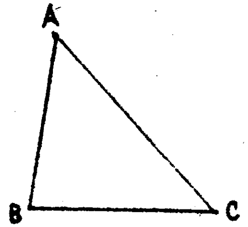
〔定理6〕　2つの3角形において，3辺がそれぞれ相等しければ，これら2つの3角形は合同である。(辺辺辺の合同)



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて，

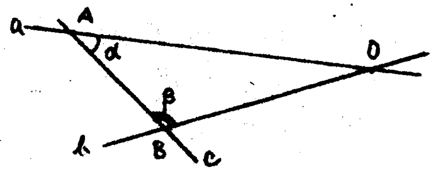
$$\left.\begin{array}{l}AB=A'B'\\ BC=B'C'\\ CA=C'A'\end{array}\right\}\longrightarrow\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$$

〔定理7〕 3角形の2つの内角の和は，2直角より小さい。



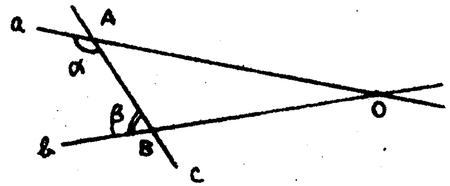
$$\triangle ABC \longrightarrow \angle A + \angle B < 2\angle R$$

〔定理8〕 相交わる2直線に第3の直線が交わるならば，はじめの2直線の交わる側の同傍内角の和は，2直角より小さい。



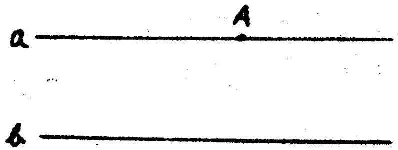
$$\left.\begin{array}{l} a \cap b = O \\ b \cap c = B \\ c \cap a = A \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha + \beta < 2\angle R$$

〔定理9〕 相交わる2直線に第3の直線が交わるならば，はじめの2直線の交わらない側の同傍内角の和は，2直角より大きい。



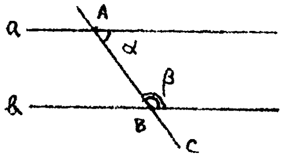
$$\left.\begin{array}{l} a \cap b = O \\ b \cap c = B \\ c \cap a = A \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha + \beta > 2\angle R$$

〔平行線の公理〕 1直線上にない1点を通って，その直線に平行な直線は，唯一存在である.



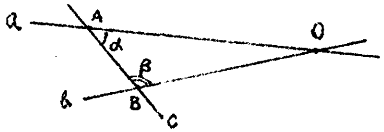
$b \not\ni A \subset a /\!/ b \longrightarrow a$：唯一存在

〔仮定〕　2つの平行線に，第3の直線が交わって作る同傍内角の和は，2直角に等しい。



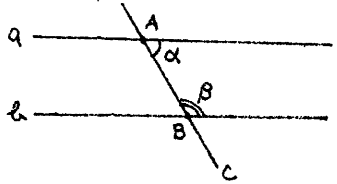
$$a /\!/ b \longrightarrow \alpha + \beta = 2\angle R$$

〔定理10〕　2直線に第3の直線が交わって作る同傍内角の和が2直角より小さければ，はじめの2直線は，同傍内角の和が2直角より小さい側で交わる。（ユークリッドの平行公準，第5公準）



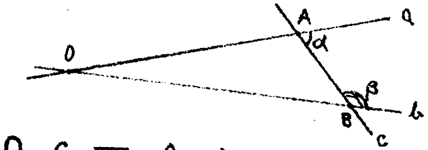
$$\left.\begin{array}{l} a \cap c = A \\ b \cap c = B \\ \alpha + \beta < 2\angle R \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ の側で} \\ a \cap b \ (= O) \end{array}\right.$$

〔定理11〕　2直線に第3の直線が交わって作る同傍内角の和が2直角に等しければ，はじめの2直線は，互に平行である。



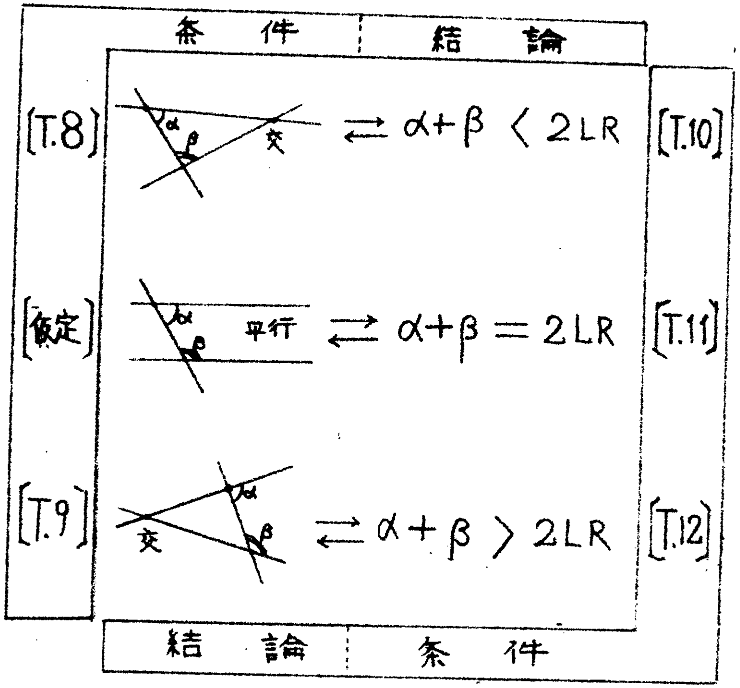
$$\left.\begin{array}{l} a \cap c = A \\ b \cap c = B \\ \alpha + \beta = 2\angle R \end{array}\right\} \longrightarrow a /\!/ b$$

〔定理12〕　2直線に第3の直線が交わって作る同傍内角の和が2直角より大きければ，はじめの2直線は，同傍内角の和が2直角より大きい側の反対側で交わる。

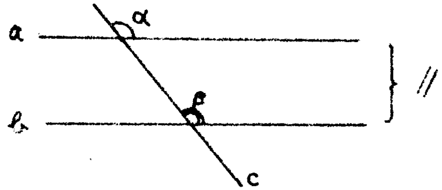


$$\left.\begin{array}{l} a \cap c = A \\ b \cap c = B \\ \alpha + \beta > 2\angle R \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ の反対側で} \\ a \cap b \ (= O) \end{array}\right.$$

〔補説〕

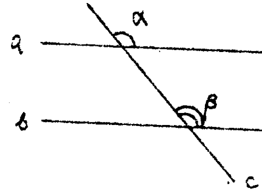


〔定理13〕　２つの平行線に，第３の直線が交わって作る同位角は，相等しい。



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \cap c \cap b \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha = \beta$$

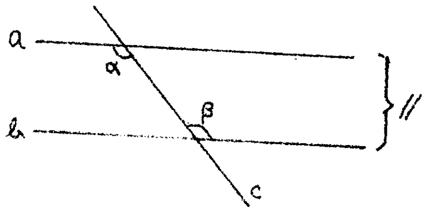
〔定理14〕　２直線に，第３の直線が交わって作る同位角が相等しければ，はじめの２直線は，互に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} a \cap c \cap b \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \longrightarrow a \parallel b$$

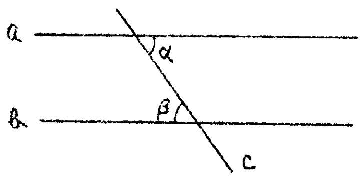
〔註〕[T.14]は，平行線の作図によく用いられる。

〔定理15〕　2つの平行線に，第3の直線が交わって作る錯角は，相等しい。



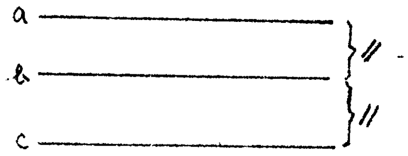
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \cap c \cap b \end{array}\right\} \longrightarrow \alpha = \beta$$

〔定理16〕　2直線に，第3の直線が交わって作る錯角が相等しければ，はじめの2直線は，互に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} a \cap c \cap b \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \longrightarrow a \parallel b$$

〔定理17〕　1つの直線に，平行な2つの相異る直線は，また互に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \longrightarrow a \parallel c$$

問 題 1

(1) 2等辺3角形の頂角の2等分線は，底辺を垂直に2等分する。

(2) 2等辺3角形の頂点と底辺の中点を結ぶ線分は，頂角を2等分し底辺に垂直である。

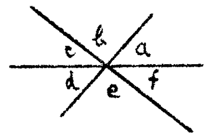
(3) 2等辺3角形の底辺の垂直2等分線は，頂点を通り頂角を2等分する。

(4) 2等辺3角形の頂点から底辺への垂線は，頂角を2等分し底辺を2等分する。

(5) 2等辺3角形の底辺の両端からでる2つの中線の長さは，相等しい。

(6) 4辺形の2つの対角線が互に他を2等分すれば，その相対する辺の長さはそれぞれ相等しい。

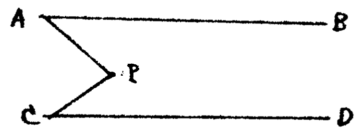
(7) If $\angle a = 70^\circ$ and $\angle c = 60^\circ$ find all the other angles.



(8) 図のように，平行2直線AB，CDの間の任意の1点をPとすれば，

$$\angle APC = \angle BAP + \angle DCP$$

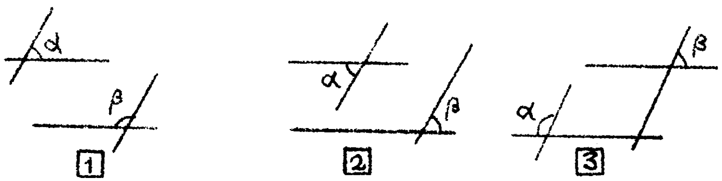
である。



(9) 2つの角において，その辺が互に平行なら，2つの角は相等しいかまたは互に補角をなす。

(10) 平行な2直線に，第3の直線が交わって作る1組の錯角の2等分線は，互に平行である。

(11) α，β は，2組の平行線からできた角である。どんな関係にあるか。



(12) 立木の影の長さで，その立木の高さを知るにはどうすればよいか。

(13) 次の3つの命題群では，それぞれの命題が，つねに真であるとき，その逆命題を作り，それらの逆命題が，つねに真であるかどうかを調べよ。

命題群Ⅰ 汽車の切符について。

1等ならば切符は白い。

2等ならば切符は青い。

3等ならば切符は赤い。

（ただし，1，2，3等以外の切符はないとする。）

命題群Ⅱ 年令について。

明治生れの人は，満60才9ヶ月以上である。

昭和生れの人は，満47才5ヶ月以下である。

大正生れの人は，その中間の年令である。

（ただし昭和48年4月現在とする）

命題群Ⅲ

昼前には本を読む。

昼から夕方までは公園にいる。

夜は眠る。

Ⅱ ピタゴラス学派 (Pythagoras. 582〜497 B.C)

イオニアでギリシア文明のさきがけをなしたThalesを中心とするイオニア学派は，遠くはなれたイタリア南部の沿海一帯のギリシアの植民地にまで，勢力をのばした。この地での数学者の代表がPythagorasであります。

Pythagorasのことは，ほとんど何も知られていません。彼は，ミレトスの近くのサモス島の名門に生れました。はじめAnaximandrosの教えを受けましたが，やがて，数学の誕生地エジプトに留学し，さらに，バビロニアにいったといわれています。

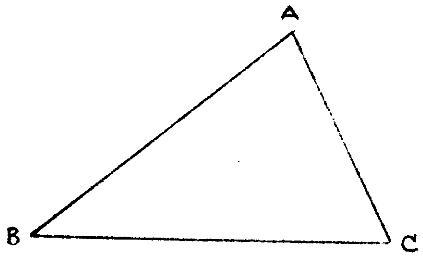
その後，Pythagorasは，ふるさとのサモス島に帰り学校をたてましたが失敗しました。当時のギリシア文明は，イオニア植民地から，イタリア南部の植民地，いわゆる大ギリシアに移りつゝありました。

そこで，Pythagorasは，イタリア南部の都市クロトンへいって学校をたてました。ところが，これは学校というよりも宗教的な教団でありました。数学的な発見もすべて教団のものPythagoras先生の発見とされました。そこで，政治上でも大きな勢力をもち，最後には反対派の人々のため学校は焼かれPythagorasも殺されてしまいました。絶対秘密を守ったこの学派の数学的な発見はPhilolaos (425 B.C頃)が書いた書物のおかげで知ることができます。

Pythagoras学派の人たちには，すべての現象のもとは数であつて，数学は哲学でありました。ですから，100円で13尾のイワシは280円では何尾かえるかということだけを問題にする商人をけいべつしました。彼らにとっては科学の研究よりもむしろ数の神秘の方が中心でありました。たとえば，6は生気，7は健康，8は友愛をあらわすといつたように。

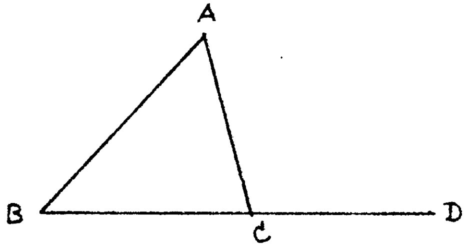
つぎに，Pythagoras学派の幾何学上の発見を定理の形でのべることにしましょう。

〔定理18〕　3角形の内角の和は，2直角に等しい。



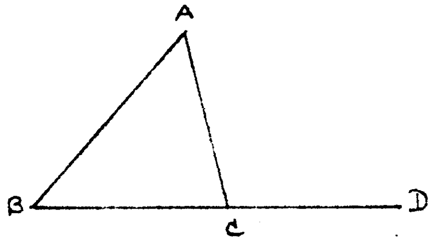
$$\triangle ABC \longrightarrow \angle A+\angle B+\angle C = 2\angle R$$

〔定理18〕系1　3角形の1つの外角は，その内対角の和に等しい。



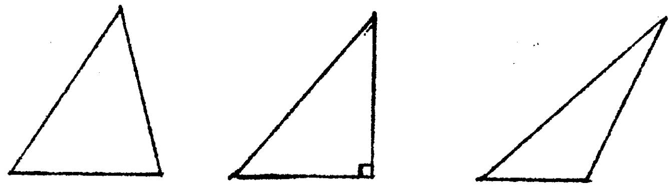
$$\triangle ABC \longrightarrow \angle ACD = \angle A+\angle B$$

〔定理18〕系2　3角形の1つの外角は，それにとならないどの内角よりも大きい。

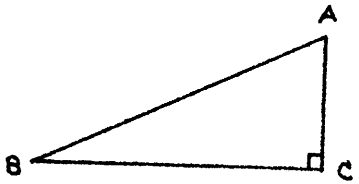


$$\triangle ABC \longrightarrow \begin{array}{l} \angle ACD > \angle A \\ \angle ACD > \angle B \end{array}$$

〔定理18〕系3　3角形は，内角として2つ以上の直角または鈍角をもてない。



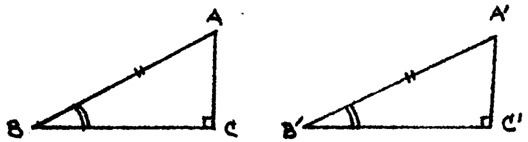
〔定理18〕系4　直角3角形の2つの鋭角の和は，1直角である。



$\triangle ABC$ において，

$$\angle C = \angle R \longrightarrow \angle A + \angle B = \angle R$$

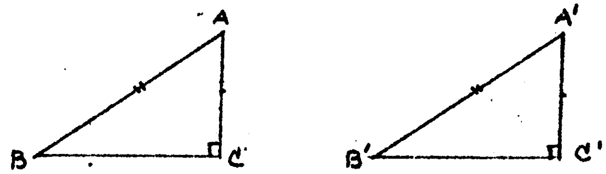
〔定理19〕2つの直角3角形において，斜辺と1鋭角とがそれぞれ相等しければ，これら2つの直角3角形は合同である。



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle C' = \angle R \\ AB = A'B' \\ \angle B = \angle B' \end{array}\right\} \longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

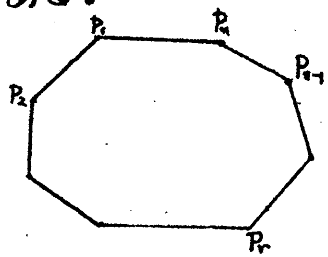
〔定理20〕2つの直角3角形において，斜辺と他の1辺とがそれぞれ相等しければ，これら2つの直角3角形は合同である。



$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ とにおいて，

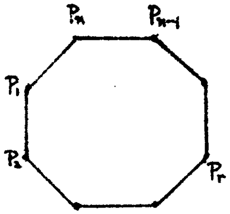
$$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle C' = \angle R \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

〔定理21〕n角形の内角の和は $(2n-4)\angle R$ である。



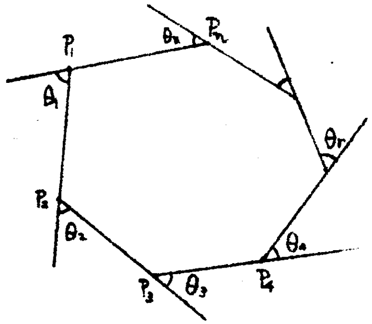
n角形 $P_1P_2\cdots P_n \longrightarrow \angle P_1 + \angle P_2 + \cdots + \angle P_n = (2n-4)\angle R$

[定理21] 系1. 正n角形の1つの内角の大きさは $\left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R$ である。



正n角形$P_1P_2\cdots P_n \longrightarrow \angle P_1P_2P_3 = \left(2-\frac{4}{n}\right)\angle R$

[定理21] 系2 n角形の外角の和は，$4\angle R$である。

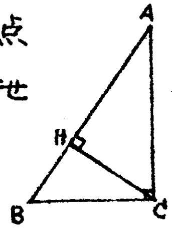


n角形$P_1P_2\cdots P_n \longrightarrow \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n = 4\angle R$

問 題 2

(1) 平行な2直線に，第3の直線が交わって作る1組の同傍内角の2等分線は，互に直交する。

(2) 直角3角形ABCの直角の頂点Cから斜辺ABに垂線CHを下せば，$\angle BCH = \angle CAH$ である。

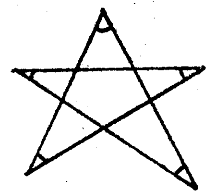


(3) 頂角がαの2等辺3角形の底角の大きさをあらわす式を作れ。

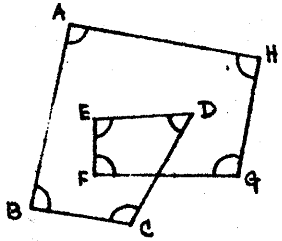
(4) $\triangle ABC$ の$\angle B$の2等分線と，$\angle C$の外角の2等分線との交点をPとするとき，つぎのことを証明せよ。

$$\angle BPC = \frac{1}{2}\angle A$$

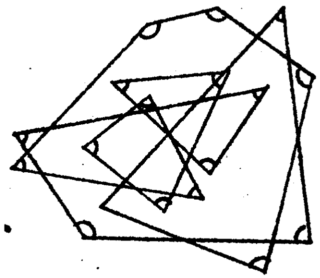
(5) 右の図のような星形5角形の頂点での5つの角の和は，$2\angle R$に等しいことを証明せよ。



(6) 右の図に示した8個の角の和を求めよ。

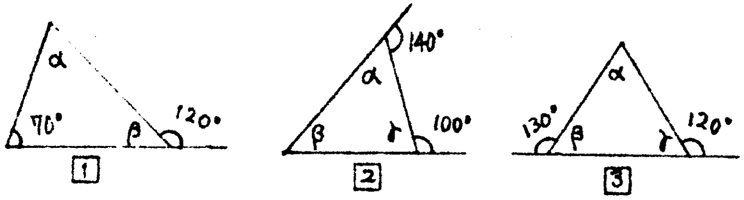


(7) 右の図に示したn個の角の和を求めよ。更にn個の角の和を求める公式を作れ。



(8) 2等辺3角形の底辺の両端から，対辺に下した垂線の長さは，相等しいことを証明せよ。

(9) 下の図で，ギリシア文字であらわされた角の大きさを求めよ。

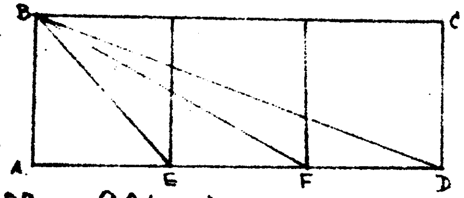


(10) n 角形の対角線の総数は，$\frac{1}{2}n(n-3)$ 本である。

(11) “一方の3角形の2辺と1角が，それぞれ他方の3角形の2辺と1角とに等しければ，それら2つの3角形は，合同である。”という定理を考えた。これは，定理とする資格があるか。

(12) “一方の3角形の2角と1辺が，それぞれ他方の3角形の2角と1辺とに等しければ，それら2つの3角形は，合同である。”という命題は定理としてよいか。

(13) 右の図は，合同な正方形が3つでできている。



$\angle AEB + \angle AFB + \angle ADB = 90°$ を証明せよ。

(14) 正 m 角形の1つの内角の大きさと，正 n 角形の1つの外角の大きさとが等しいとき，次の等式が成立することを示し，このような正多角形の組をすべて求めよ。

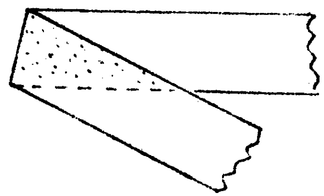
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

(15) 辺数が p, q, r である3個の正多角が，1点のまわりに重なりもせず，すき間もなくならんでいるとき，

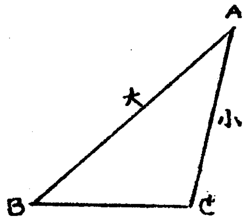
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$

が成立する。

(16) 下の図のように紙テープを2つに折ると，重なった部分はどんな形になるか。



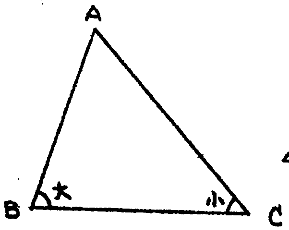
〔定理22〕 3角形の2辺が相等しくなかったならば，その大きな辺に対する内角の方が，小さな辺に対する内角より大きい。



$\triangle ABC$ において，

$AB > AC \longrightarrow \angle C > \angle B$

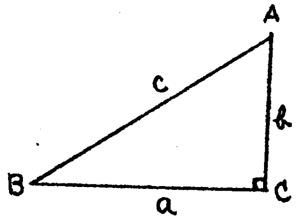
〔定理23〕 3角形の2角が相等しくなかったならば，その大きな角に対する辺の方が，小さな角に対する辺より大きい。



$\triangle ABC$ において，

$\angle B > \angle C \rightarrow AC > AB$

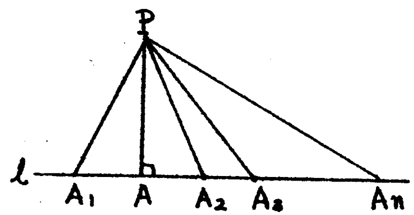
〔定理23〕系1 直角3角形においては，斜辺が最長の辺である。



$\triangle ABC$ において，

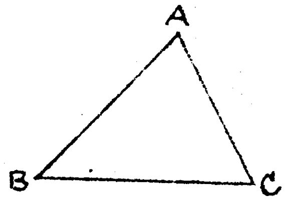
$\angle C = \angle R \rightarrow c > a, b$

〔定理23〕系2 1定点と1定直線上の点を結ぶ線分の長さのうちでは，この定点から，この定直線に下した垂線の長さが最小である。



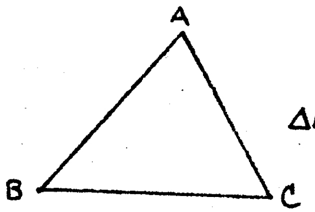
$PA < PA_1, PA_2, PA_3, \cdots\cdots, PA_n$.

〔定理24〕 3角形の2辺の和は，他の1辺より大きい。



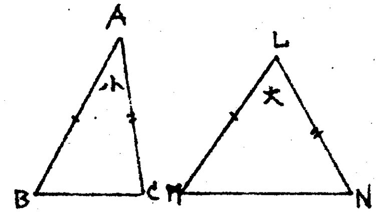
$$\triangle ABC \longrightarrow \begin{cases} AB+BC > CA \\ BC+CA > AB \\ CA+AB > BC \end{cases}$$

〔定理24〕系 3角形の2辺の差は，他の1辺より小さい。



$$\triangle ABC \longrightarrow \begin{cases} AB \sim BC < CA \\ BC \sim CA < AB \\ CA \sim AB < BC \end{cases}$$

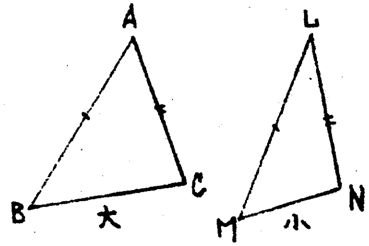
〔定理25〕 2つの3角形において，2組の辺の長さがそれぞれ相等しく，それらがはさむ内角に大小があれば，大きな角に対する第3辺の長さは，小さな角に対する第3辺の長さより大きい。



$\triangle ABC$ と $\triangle LMN$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l} AB = LM \\ AC = LN \\ \angle A < \angle L \end{array}\right\} \rightarrow BC < MN$$

〔定理25〕系 2つの3角形において，2組の辺の長さがそれぞれ相等しく，第3辺の長さに大小があれば，大きな第3辺に対する角は，小さな第3辺に対する角より大きい。



$\triangle ABC$ と $\triangle LMN$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l} AB = LM \\ AC = LN \\ BC > MN \end{array}\right\} \rightarrow \angle A > \angle L$$

問題 3

(1) △ABC 内に1点をとれば，

$$AB+AC > CP+PB$$

である。

(2) △ABC において，AB > AC とし，底辺BC の中点をMとすれば，

$$\angle AMB > \angle AMC$$

である。

(3) 凸4辺形内に1点をとり，この点から4つの頂点にいたる距離の和を最小にしたい。この点をどこにとればよいか。

(4) 1直線 l と，その同じ側に2点A,Bがある。直線 l 上に1点Pを求めて，

$$AP + BP$$

を最小にしたい。P点をどこにとればよいか。

(5) 直角3角形ABC の直角の頂点Aから，底辺BCに下した垂線の足をDとすれば，

$$AB + CA < BC + AD$$

である。

(6) △ABC の辺BCへの中線をAMとすれば，

$$AB + CA > 2AM$$

である。

[定理26]　平行4辺形においては，

(1)　その相隣る2つの内角の和は，2直角に等しい。

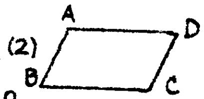
(2)　その相対する角の大きさは，相等しい。

(3)　その相対する辺の長さは，相等しい。

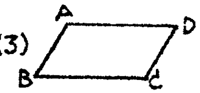
(4)　その対角線は，互に他を2等分する。

(1) 

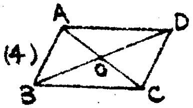
$$\text{▱}ABCD \rightarrow \begin{cases} \angle A+\angle B=2\angle R \\ \angle A+\angle D=2\angle R \end{cases}$$

(2) 

$$\text{▱}ABCD \rightarrow \begin{cases} \angle A=\angle C \\ \angle B=\angle D \end{cases}$$

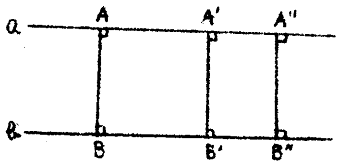
(3) 

$$\text{▱}ABCD \rightarrow \begin{cases} AB=CD \\ BC=DA \end{cases}$$

(4) 

$$\text{▱}ABCD \rightarrow \begin{cases} AO=OC \\ BO=OD \end{cases}$$

[定理26] 系　2つの平行線の両方に垂直な直線が，これらの平行線からきりとられる線分の長さは，いつも一定である。



$$a \parallel b \rightarrow AB=A'B'=A''B''=\cdots=\text{const.}$$

[定理27]　4辺形において，

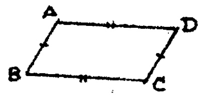
(1)　2組の対辺の長さが，それぞれ相等しいとき。

(2)　1組の対辺の長さが相等しく，かつ平行であるとき。

(3)　2組の対角の大きさが，それぞれ相等しいとき。

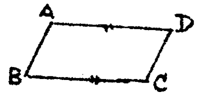
(4)　対角線が，互に他を2等分するとき。

平行4辺形である。



4辺形ABCDにおいて，

$$\begin{rcases} AB=CD \\ BC=DA \end{rcases} \rightarrow \text{▱}ABCD$$

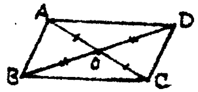


4辺形ABCDにおいて

$$AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC \rightarrow \text{▱}ABCD$$

4辺形ABCDにおいて，

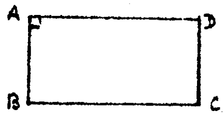
$$\begin{rcases} \angle A=\angle C \\ \angle B=\angle D \end{rcases} \rightarrow \text{▱}ABCD$$



4辺形ABCDにおいて，

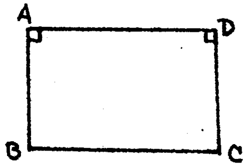
$$\begin{rcases} AO=OC \\ BO=OD \end{rcases} \rightarrow \text{▱}ABCD$$

[定理28]　矩形の内角は，すべて直角である。



$$\begin{rcases} \text{▱}ABCD \\ \angle A=\angle R \end{rcases} \rightarrow \angle B=\angle C=\angle D=\angle R$$

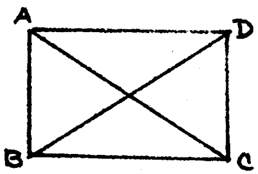
[定理29]　内角がすべて直角な4角形は，矩形である。



4辺形ABCD において，

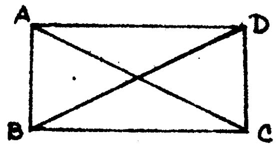
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle R \rightarrow$ □ABCD.

[定理30]　矩形の対角線の長さは，相等しい。



□ABCD $\rightarrow AC = BD$

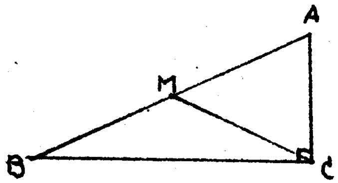
[定理31]　対角線の長さの相等しい平行4辺形は，矩形である。



▱ABCD において，

$AC = BD \rightarrow$ □ABCD.

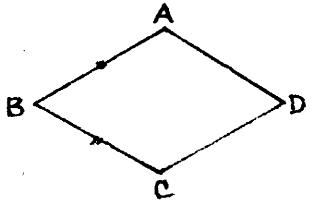
[定理32]　直角3角形の斜辺の中点は，3頂点から等距離にある。



△ABC において，

$$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle R \\ AM = MB \\ \text{(M: ABの中点)} \end{array}\right\} \rightarrow AM = BM = CM$$

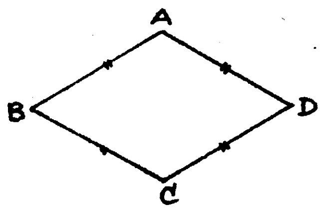
〔定理33〕 菱形の4つの辺の長さは，相等しい。



4辺形ABCDにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}\text{▱}ABCD\\ AB=BC\end{array}\right\} \rightarrow AB=BC=CD=DA$$

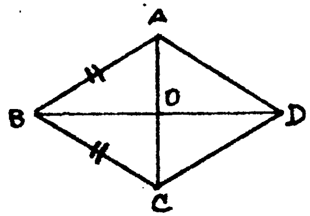
〔定理34〕 4つの辺の長さの等しい4辺形は，菱形である．



4辺形ABCDにおいて，

$$AB=BC=CD=DA \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{▱}ABCD\\ AB=BC\end{array}\right.$$

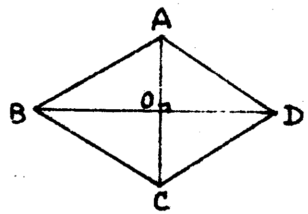
〔定理35〕 菱形の対角線は，互に他を垂直に2等分する。



4辺形ABCDにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}\text{▱}ABCD\\ AB=BC\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}AC\perp BD\\ AO=OC\\ BO=OD\end{array}\right.$$

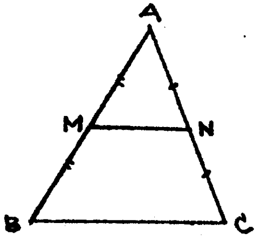
〔定理36〕 対角線が互に他を垂直に2等分する4辺形は，菱形である。



4辺形ABCDにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}AC\perp BD\\ AO=OC\\ BO=OD\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{▱}ABCD\\ AB=BC\end{array}\right.$$

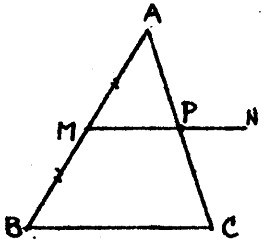
〔定理37〕　3角形の2辺の中点を結ぶ線分は，第3辺に平行で，長さはその半分に等しい。



△ABC において，

$$\left.\begin{array}{l} AM=MB \\ (M:AB\text{の中点}) \\ AN=NC \\ (N:AC\text{の中点})\end{array}\right\} \rightarrow MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$$

〔定理37〕系　3角形の1辺の中点を通り，他の辺に平行な直線は，第3辺の中点を通る。



△ABC において，

$$\left.\begin{array}{l} AM=MB \\ (M:AB\text{の中点}) \\ MN \parallel BC \\ MN\cap AC=P\end{array}\right\} \rightarrow AP=PC$$

（研究）　平行4辺形，長方形（矩形），菱形，正方形の分類の仕方を考えよ。

問題 4

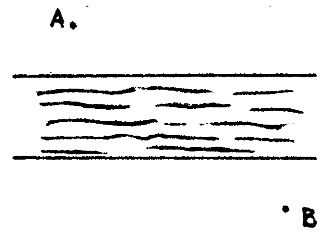
(1) 台形の平行でない2辺の中点を結ぶ線分は、底辺に平行で、その長さは、両底の長さの和の半分に等しい。

(2) 任意の4辺形の各辺の中点を順次に結んでできる4辺形は、平行4辺形である。

また、1組の対辺の中点と、対角線の中点とを順次に結んでできる4辺形も、平行4辺形である。

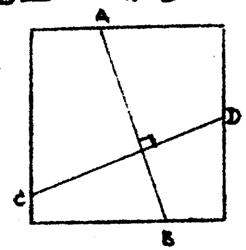
(3) 任意の4辺形の相対する辺の中点を結ぶ線分と、対角線の中点を結ぶ直線とは、共点である。

(4) 平行4辺形、矩形、菱形、正方形をいろいろの方法で分類せよ。



(5) 河の両岸に、図のようにA,B 2つの部落がある。A,B両地点の間に最短の道路と橋とを作れ。

(6) 正方形の相対する2辺上にA,B 2点を任意にとる。線分ABに垂直な直線が、正方形の他の2辺と交わる点をC,Dとすれば、



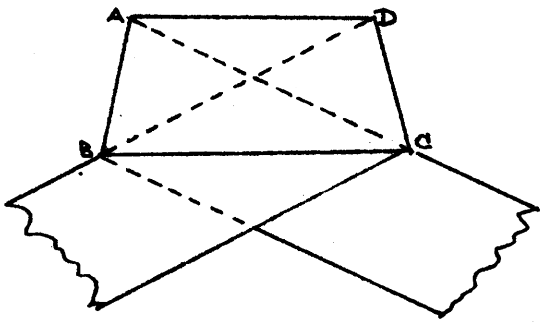
$$AB = CD$$

である。

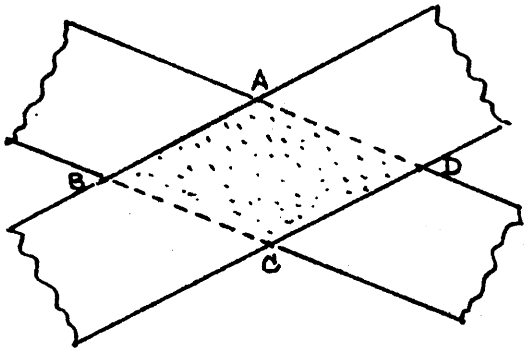
(7) △ABCの∠B, ∠Cの2等分線が、対辺と交わる点をD,Eとし、BD = CEならば△ABCは、2等辺である。

(註) この逆はやさしいが、この問題は、そんなにやさしくはない。

(8) 下の図のようにテープを２度折ると，台形ABCD ができる。この台形はどんな性質をもつか。



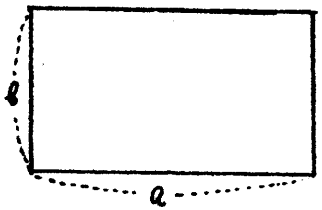
(9) 下の図のように，同じはばの２本のテープを重ねると，重なった部分がつねに菱形になることを証明せよ。



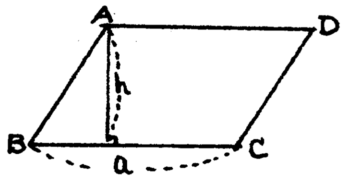
〔定理38〕　2辺の長さが，それぞれ a および b である矩形の面積 $S_{\square}$ は，

公式：　$S_{\square} = ab$

であたえられる。

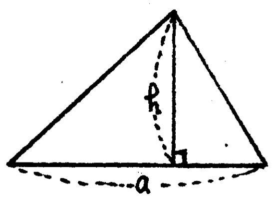


〔定理39〕　平行4辺形の面積は，底辺の長さとそれに対する高さとの積に等しい。



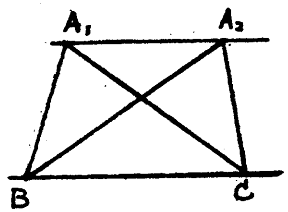
$$S_{\square} = ah$$

〔定理40〕　3角形の面積は，底辺の長さとそれに対する高さとの積の半分に等しい。



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$$

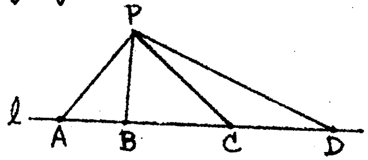
〔定理40〕系1　底辺を共有する2つの3角形において，もしそれらの頂点を結ぶ直線が，底辺に平行ならば，これら2つの3角形の面積は相等しい。



$\triangle A_1BC$ と $\triangle A_2BC$ とにおいて，

$A_1A_2 /\!/ BC \longrightarrow S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A_2BC}$.

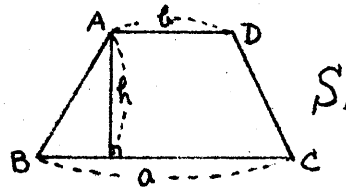
〔定理40〕系2　頂点を共有する2つの3角形において，もしそれらの底辺が同じ直線上にあるならば，これら2つの3角形の面積の比は，その底辺の長さの比に等しい。



$\triangle PAB$ と $\triangle PCD$ とにおいて，

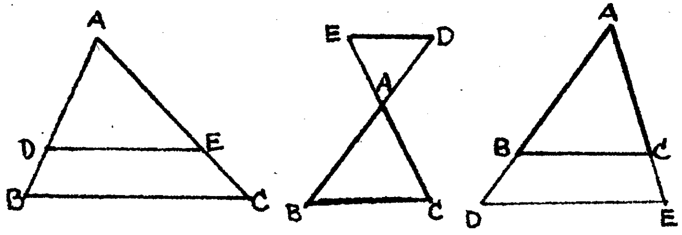
$$A,B,C,D：共線 \longrightarrow \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}} = \frac{AB}{CD}$$

〔定理41〕　台形の面積は，両底の長さの和に，高さを掛けたものの半分である。



$$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

〔定理42〕　3角形の1辺に平行な直線は，他の2辺を相等しい比に分ける。



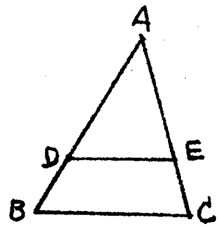
$\triangle ABC$ において，

$$DE \mathbin{/\!/} BC \longrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

〔定理42〕系　3角形ABC において，底辺BC に平行な直線が，2辺 AB，AC と交わる点をそれぞれD，E とすれば，

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

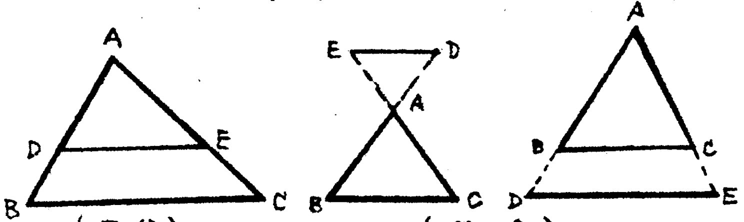
である。



$\triangle ABC$ において，

$$BC \mathbin{/\!/} DE \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

[定理43]　3角形の2辺を，同じ比に同時に内分又は外分する点を結ぶ直線は，第3辺に平行である。

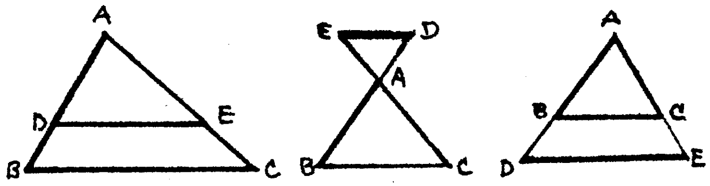


(内分)　(外分)

△ABC において，

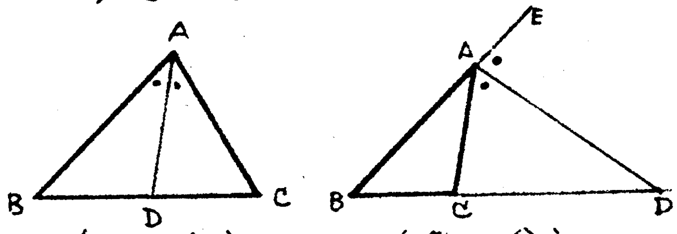
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \longrightarrow DE \parallel BC$$

[定理44]　線分DEとBCが平行で，線分DB又はその延長上の1点Aに対して，AD／AB＝DE／BC が成りたてば，3点 A,E,C は共線である。



$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel DE \\ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} \end{array}\right\} \longrightarrow 3点A,E,C：共線$$

[定理45]　3角形の内角又は外角を2等分する直線は，それに対する辺を他の2辺の比に，それぞれ内分または外分する。



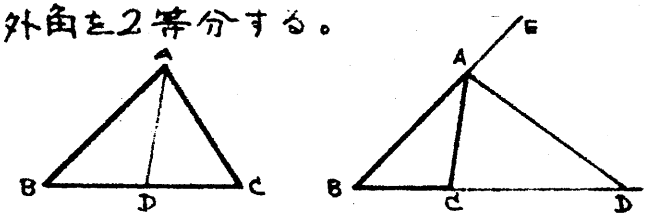
(内分)　(外分)

△ABC において，

$\angle BAD = \angle CAD$　　$\angle EAD = \angle CAD$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

[定理45] 系　3角形の1辺を他の2辺の比に内分又は外分する点を，それに対する頂点に結ぶ直線はその頂角または頂角の外角を2等分する。

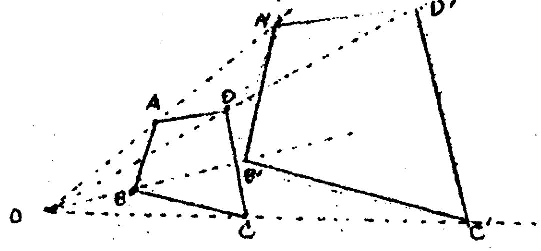


△ABC において，

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

$\angle BAD = \angle CAD$　　$\angle EAD = \angle CAD$

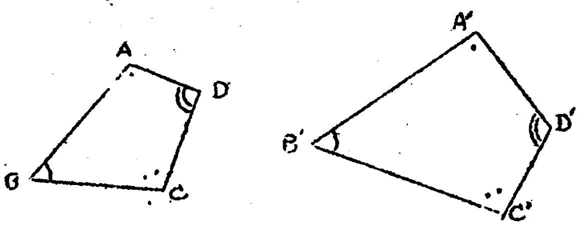
〔定理46〕 2つの多角形が相似の位置にあれば，その対応する辺の比はすべて相等しく，その対応する角もすべて相等しい。



n角形ABCD ∽ n角形A'B'C'D'
(n=4)

$$\text{n角形}ABCD \sim \text{n角形}A'B'C'D' \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'} \\ \angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D' \end{cases}$$

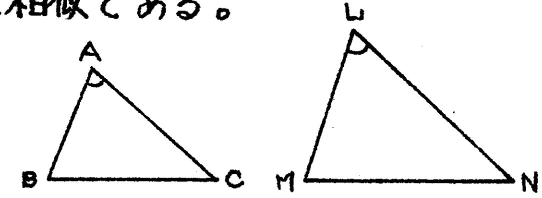
〔定理46〕系 2つの多角形において，その対応する辺の比がすべて相等しく，その対応する角もすべて相等しければ，これら2つの多角形は，相似の位置におくことができる。



n角形ABCD と n角形A'B'C'D' とにおいて，(n=4)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'} \\ \angle A=\angle A' \quad \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C' \quad \angle D=\angle D' \end{array}\right\} \longrightarrow \text{n角形}ABCD \sim \text{n角形}A'B'C'D'$$

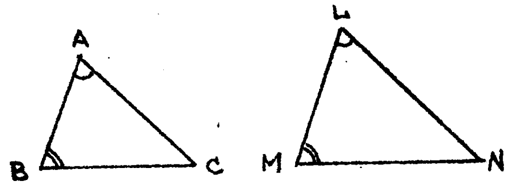
〔定理47〕 2つの3角形において，対応する2組の辺が比例し，そのはさむ角が相等しければ，これら2つの3角形は，互に相似である。



△ABC と △LMN とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{LM}=\dfrac{AC}{LN} \\ \angle A=\angle L \end{array}\right\} \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle LMN$$

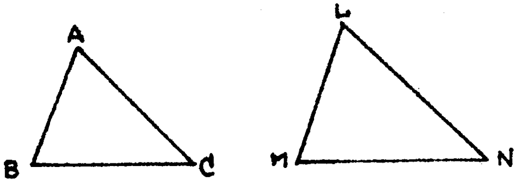
〔定理48〕 2つの3角形において，2組の対応する角が相等しければ，これら2つの3角形は，互に相似である。



△ABC と △LMN とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l} \angle A=\angle L \\ \angle B=\angle M \end{array}\right\} \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle LMN$$

［定理49］　2つの3角形において，相対する3組の辺が比例すれば，これら2つの3角形は，互に相似である。



$\triangle ABC$ と $\triangle LMN$ とにおいて，

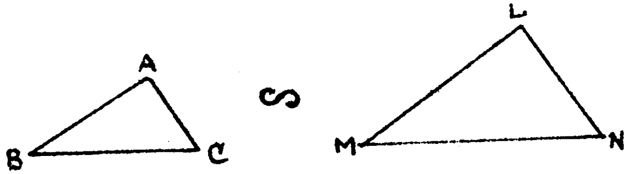
$$\frac{AB}{LM}=\frac{BC}{MN}=\frac{CA}{NL}(=k)\rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle LMN$$

［定理50］　2つの直角3角形において，斜辺の比が他の1組の辺の比に等しければ，これら2つの直角3角形は，互に相似である。

$\triangle ABC$ と $\triangle LMN$ とにおいて，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{LM}=\dfrac{AC}{LN}(=k)\\ \angle C=\angle N=\angle R\end{array}\right\}\longrightarrow \triangle ABC \backsim \triangle LMN$$

［定理51］　相似3角形の面積の比は，対応辺の比の2乗に等しい。（相似3角形の面積の比は，対応辺の2乗の比に等しい。）

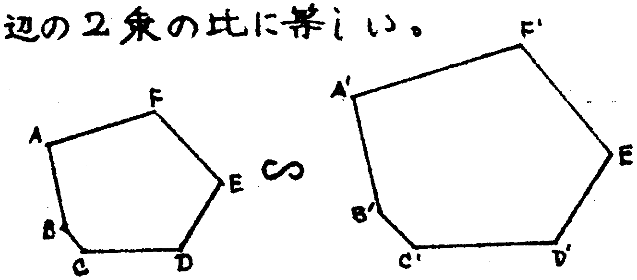


$\triangle ABC$ と $\triangle LMN$ とにおいて，

$$\triangle ABC \backsim \triangle LMN \rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle LMN}}=\left(\frac{AB}{LM}\right)^2=k^2$$

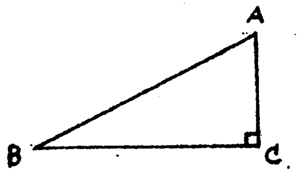
$$\left(\frac{AB}{LM}=\frac{BC}{MN}=\frac{CA}{NL}=k\right)$$

［定理51］系　相似多角形の面積の比は，対応辺の2乗の比に等しい。



$$6\text{角形}ABCDEF \backsim 6\text{角形}A'B'C'D'E'F' \rightarrow \frac{S_{\bigcirc}}{S'_{\bigcirc}}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

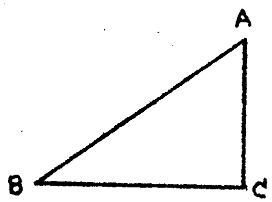
〔定理52〕 直角3角形の斜辺の平方は，他の2辺の平方の和に等しい。(3平方の定理)



$\triangle ABC$ において，

$$\angle C = \angle R \longrightarrow AB^2 = BC^2 + CA^2$$

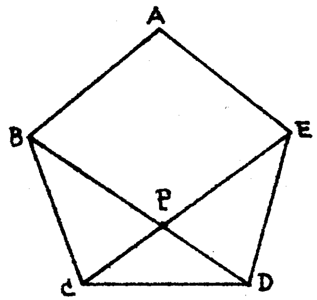
〔定理53〕 3角形の1辺の平方が，他の2辺の平方の和に等しければ，この3角形は，直角3角形である。



$\triangle ABC$ において，

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 \longrightarrow \angle C = \angle R$$

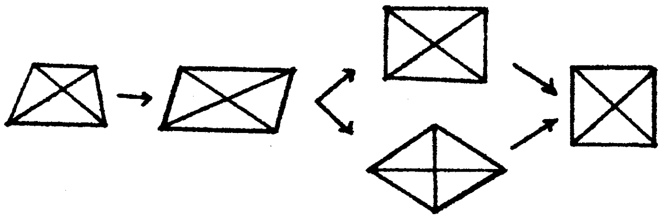
〔定理54〕 正5角形の対角線は，互に他を黄金分割する。



$$\left.\begin{array}{l} \text{正5角形}ABCDE \\ BD \cap CE = P \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} BP^2 = BD \cdot DP \\ EP^2 = EC \cdot CP \end{array}\right.$$

問 題 5

(1) 下図で台形，平行4辺形，矩形，菱形，正方形の対角線の間に，どんな関係があるか。



(2) 平行4辺形ABCDの対角線AC上に1点Eをとり，Eを通ってABに平行に引いた直線が，辺DA，BCと交わる点をそれぞれP，Q，ADに平行に引いた直線が，辺AB，DCと交わる点をそれぞれR，Sとすれば，▱PESDと▱RBQEとは等積である．

(3) 台形の上底と下底が4cm，5.5cmで面積が19cm²である．高さは何cmか。

(4) △ABCにおいて，辺BCの中点をMとし，∠AMBの2等分線とABとの交点をD，∠AMCの2等分線とACとの交点をEとすれば，DE // BCである．

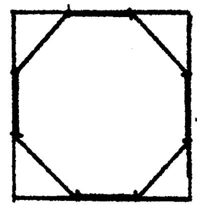
(5) 直角3角形ABCの直角の頂点Aから斜辺BCに下した垂線の足をDとすれば，

$\triangle BAD \backsim \triangle DAC \backsim \triangle ABC$

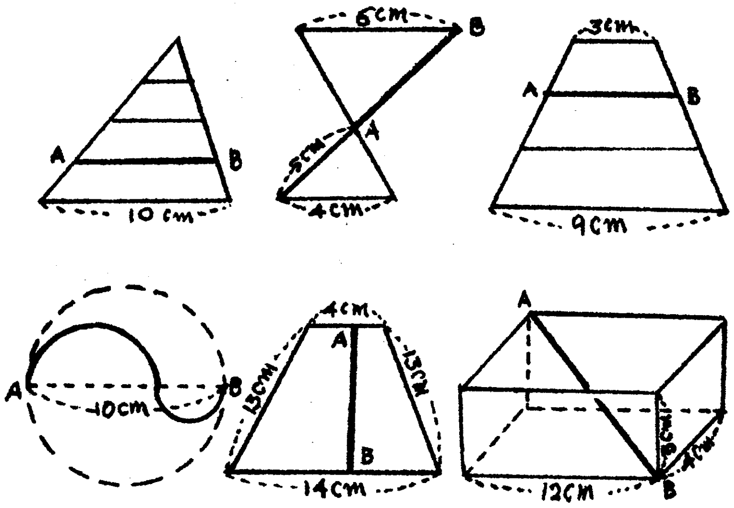
である．

(6) 底辺が1.8m，高さが2.5mの平行4辺形の面積と等積の3角形がある。その底辺が3mなら高さは何mか。

(7) 正8角形を作図するのに，右の図のように，正方形の各辺の3等分点を結んだのでは，正8角形にならない。どうすればよいか．



(8) 次の図で, ABの長さを計算せよ.



(9) 相似比が3:4の6角形の面積の比はどれだけか。又小さい方の面積が36 cm²だとすれば, 大きい6角形の面積は,何cm²か。

(10) 3角形の3辺の長さをa, b, cとし, 下の式であらわされるとき, 次の問に答えよ。

$a = m^2 - n^2,\quad b = 2mn \quad c = m^2 + n^2$

次の計算をせよ.

$a^2 = (m^2 - n^2)^2 = \quad b^2 = (2mn)^2 = \quad c^2 = (m^2 + n^2)^2 =$

又, a, b, c の間にどんな関係があるか。そのような3角形はどんな3角形か。

m, nが右の表で示す値をとるとき, a, b, cの空らんをうめなさい。

m	n	a	b	c
2	1	3		5
3	1		6	10
3	2	5	12	
4	1		8	17

(11) 4辺形ABCDの対角線が直交すれば,

$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

である.

(14) 3角形の3つの中線をAL, BM, CNとすれば, $AL^2 + BM^2 + CN^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$である。

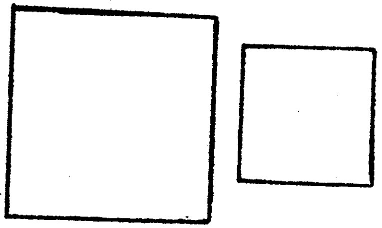
(13)　1辺の長さ a の正3角形の面積を求めよ。

(12)　3角形ABCの中線をAMとすれば

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

である。(パップスの定理)

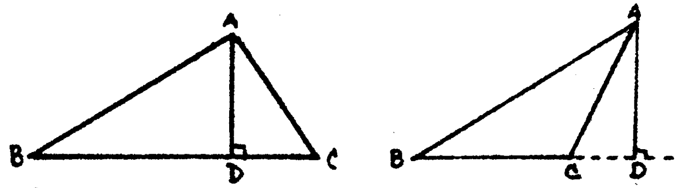
(15)　右の図の2つの正方形の面積の和に等しい面積の正方形を作れ，又差に等しい面積の正方形を作れ。



(16)　n, $\frac{1}{2}(n^2-1)$, $\frac{1}{2}(n^2+1)$ を3辺とする3角形は，直角3角形である。

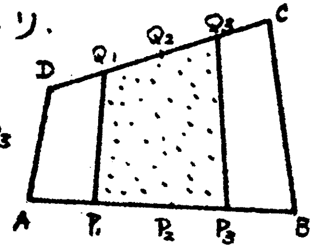
(17)　直角3角形の直角を夾む2辺の上の正3角形の面積の和は，斜辺の上の正3角形の面積に等しい。

(18)　$\triangle ABC$ において，$\angle A \neq \angle R$ のときは，

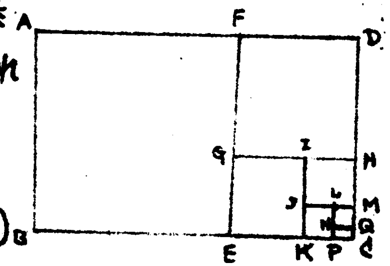


$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC\cdot DC$　　　$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC\cdot DC$

(19)　凸4辺形ABCDをとり，辺AB，CDを4等分し分点を，P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3 とする。このとき4辺形 $P_1P_3Q_3Q_1$ の面積は，はじめの4辺形の形に関係なく，つねに4辺形ABCDの面積の $\frac{1}{2}$ である。



(20)　黄金矩形ABCDから正方形ABEFをとり除いた残りの矩形ECDFも黄金矩形である。この操作は無限に続けられる。(黄金矩形とは2辺の比が黄金比に等しい矩形を呼ぶとする)



Ⅲ　ソフィスト一派

当時，ギリシヤは，ひさしくペルシヤの圧迫をうけていたが，紀元前480年ついにギリシヤは，サラミス湾の大海戦でペルシヤの大軍をうち破ってしまいました。

その後，ギリシヤはアテネを中心として，ますますさかえるようになりました。アテネは単に政治や商業の中心地だけでなく，文化の中心地となってきました。そこで，アテネには多くの学者が集ってきました。イオニア学派の哲学者も，ピタゴラス学派の人々もアテネに集ってきました。

アテネの人々の生活精神は，自由と公明を重んじたから，ピタゴラス学派の秘密主義はかげをひそめました。すべていやしい仕事は奴隷にさせて，アテネの人々は余裕のある市民となりました。彼らは，政治や科学上の討論で，すぐれた人になりたがり，そのため高等教育を受けなければならなくなりました。この新しい要求からソフィスト（智者）と呼ばれる教師があらわれました。彼らは，修辞学，哲学，数学，天文学を教えましたが，なかでも数学はピタゴラス学派が研究から除外してきた円の研究をはじめました。

ソフィスト一派の数学研究は，つぎの有名な3問題がその焦点となりました。すなわち，定木とコンパスとを有限回使用して作図する問題。

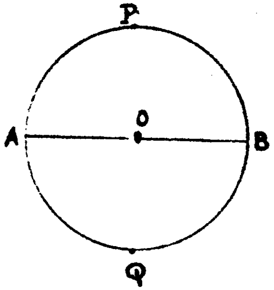
1° 任意の角あるいは円弧を3等分すること。

2° 与えられた立方体の2倍の体積を有する立方体をつくること。立方体の倍体問題。

3° 与えられた円の面積と，まったく等しい面積を有する正方形，または他の直線図形をつくること。円積問題。

およそ数学の問題の中で，これらの3問題ほど，長いあいだ熱心に根気よく論究されたものはありませんでした。

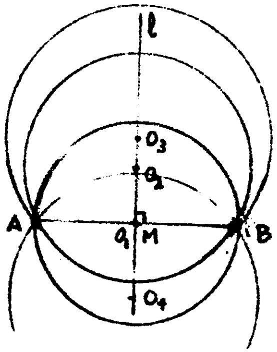
［定理55］ 円は，その直径によって２等分される。



円O において，

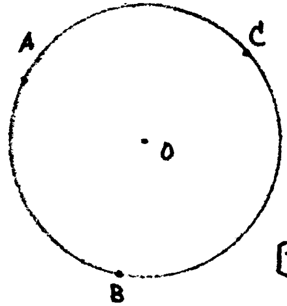
AB：直径 → $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\frown}{APB} \text{ と } \overset{\frown}{AQB} \\ \text{とは AB に関} \\ \text{して対称。} \end{array} \right.$

［定理56］ ２定点を通る円の中心は，この２定点を結ぶ線分の垂直２等分線上にある。（弦の垂直２等分線は円の中心を通る。）



$\left. \begin{array}{l} \text{A, B：２定点} \\ l\text{：ABの垂直２等分線} \\ O_i\text{：A, B通る円の中心} \end{array} \right\} \to O_i \subset l$

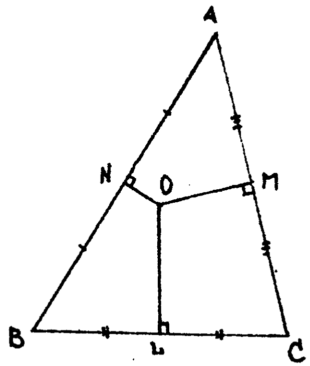
［定理57］ １直線上にない３点を通る円は，唯一存在である．（１直線上にない３点は１つの円を決定する。）



$\left. \begin{array}{l} \text{3点A, B, Cは} \\ \text{共線でない。} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{A, B, Cを通る} \\ \text{円Oは唯一存在} \end{array} \right.$

［註］ 以後，円Oとかくかわりに円(A, B, C)とかくことができる。

［定理57］系 ３角形の各辺の垂直２等分線は，共点である。



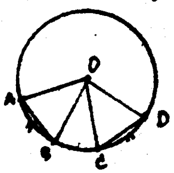
△ABC において，

$\left. \begin{array}{l} AB \perp ON \\ AN = NB \\ BC \perp OL \\ BL = LC \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} CA \perp OM \\ CM = MA \end{array} \right.$

［註］ O：外心．

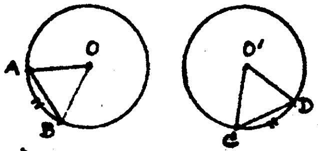
〔定理58〕 同じ円または相等しい円において，相等しい弧に対する中心角と弦は，また相等しい。

（同じ円）　　　円O において，



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \rightarrow \begin{cases} \angle AOB = \angle COD \\ AB = CD \end{cases}$$

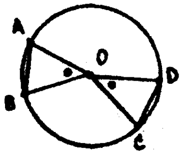
（相等しい円）　　円O, O′ において，



$$\left.\begin{array}{l} OA = O'C \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \angle AOB = \angle CO'D \\ AB = CD \end{cases}$$

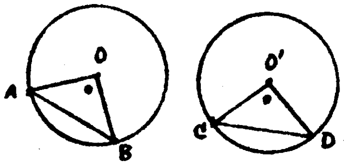
〔定理59〕 同じ円または相等しい円において，相等しい中心角に対する弦と弧は，また相等しい。

（同じ円）　　　円O において，



$$\angle AOB = \angle COD \rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{cases}$$

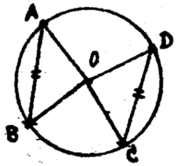
（相等しい円）　　円O, O′ において，



$$\left.\begin{array}{l} OA = O'C \\ \angle AOB = \angle CO'D \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{cases}$$

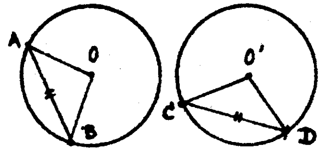
〔定理60〕 同じ円または相等しい円において，相等しい弦に対する中心角と弧は，また相等しい。

（同じ円）　　　円O において，



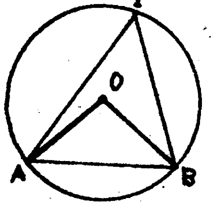
$$AB = CD \rightarrow \begin{cases} \angle AOB = \angle COD \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{cases}$$

（相等しい円）



$$\left.\begin{array}{l} OA = O'C' \\ AB = CD \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \angle AOB = \angle CO'D \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \end{cases}$$

〔定理61〕 1つの円において，ある弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分に等しい。

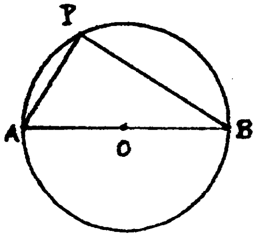


円O において，

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB：円周角 \\ \angle AOB：中心角 \end{array}\right\} \rightarrow \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

（註） この定理は，弧を弦とおきかえてもなりたつ。

〔定理61〕系　直径の上に立つ円周角は，直角である。

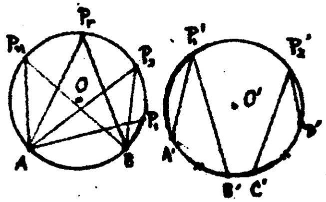


円O において，

AB：直径 $\longrightarrow \angle APB=\angle R$

〔定理62〕　同じ円または相等しい円において，同じ弧または相等しい弧に対する円周角は，すべて相等しい。また逆もなりたつ。

（同じ円）



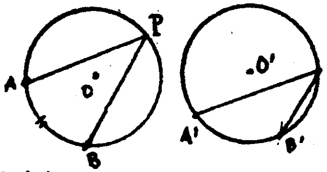
① 円O において，

$\overset{\frown}{AB} \to \angle P_1=\angle P_2=\cdots=\angle P_n$

② 円O′ において，

$\overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{C'D'} \leftrightarrow \angle P_1'=\angle P_2'$

（相等しい円）

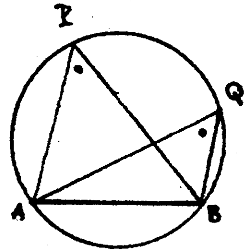


③ 円O,O′ において，

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'} \leftrightarrow \angle P=\angle P'$

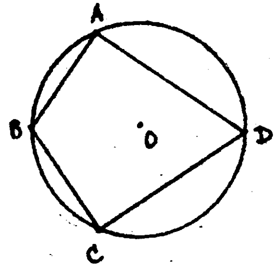
（註）本定理は，弧を弦とおきかえてもなりたつ。

〔定理63〕　1つの線分に対して2点が同じ側にあり，しかもこの2点からの線分を見込む角が相等しいならば，これら4点（うち2点は線分の両端）は共円である。



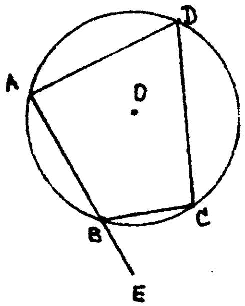
P,Q 2点は，線分ABの同側 $\angle P=\angle Q$ $\Big\} \longrightarrow \Big\{$ 4点,P,Q,A,B;共円である。

〔定理64〕　円に内接する4辺形の相対する内角は，互に補角をなす。



4点A,B,C,D が共円 $\Big\} \longrightarrow \Big\{$ $\angle A+\angle C=2\angle R$, $\angle B+\angle D=2\angle R$

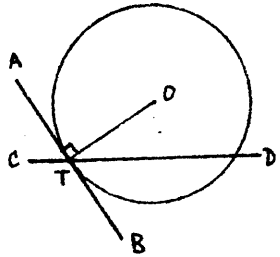
〔定理64〕系1　円に内接する4辺形の1つの外角は，その内対角に等しい。



円Oに内接する4辺形ABCDにおいて．

$\angle EBC$：外角 $\rightarrow$ $\angle EBC = \angle ADC$

〔定理65〕円周上の1点を通って，この点を通る半径に垂直な直線は，この円の接線であり，垂直でない直線は割線である。

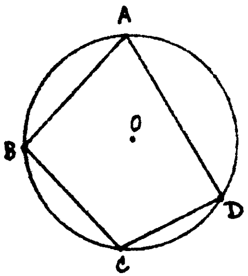


円Oにおいて，T：円周上の点

$AB \perp OT$ $\rightarrow$ AB：接線

$CD \not\perp OT$ $\rightarrow$ CD：割線

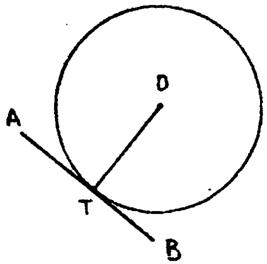
〔定理64〕系2　相対する1組の内角が，互に補角をなす4辺形は，円に内接する。



4辺形ABCDにおいて，

$\angle A + \angle C = 2\angle R$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{4点A,B,C,D}\\\text{は共円である}\end{array}\right.$

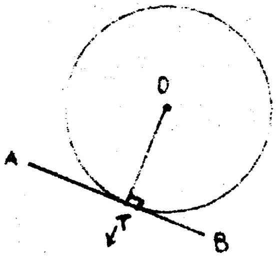
〔定理65〕系1　円の接線は，円の中心と接点を結ぶ直線に垂直である。



円Oにおいて，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB：Tにおける}\\\text{円Oの接線}\end{array}\right\}$ $\longrightarrow$ $OT \perp AB$

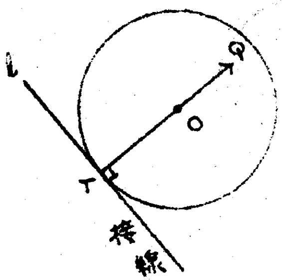
〔定理65〕系2　円の接線へ，円の中心から下した垂線は接点を通る。



円O において，

AB：Tにおける円Oの接線 → $\left\{\begin{array}{l}\text{OからABへの}\\ \text{垂線はTを通る.}\end{array}\right.$

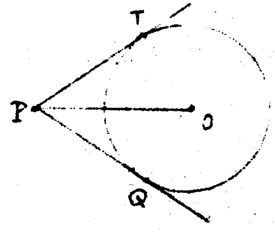
〔定理65〕系3　円の接線へ，接点でたてた垂線は，その中心を通る。



円O において，

$\left.\begin{array}{l}l\text{：Tでの接線}\\ TQ \perp l\end{array}\right\}$ → TQはOを通る.

〔定理66〕円外の1点から，この円に引いた2つの接線の長さは相等しく，この点と円の中心を結ぶ直線は，接線間の角を2等分する。



円O において，

P：円O外の点 → $\left\{\begin{array}{l}PT = PQ\\ \angle TPO = \angle QPO\end{array}\right.$

問　題　6

(1). 直径によつて2等分される弦は，どんな弦か。

(2) 三角形ABCの辺BCの中点をMとするとき，

$$\angle ABC + \angle MAC = \angle R$$

であるという。△ABCはどんな三角形か。

(3) 3角形ABCにおいて，AからBCに下した垂線の足をD，Aを通る三角形ABCの外接円の直径をAEとすれば，

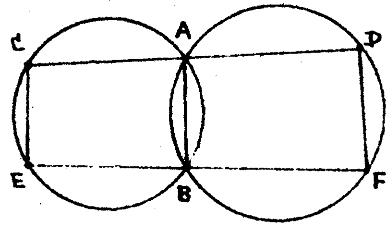
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

である。

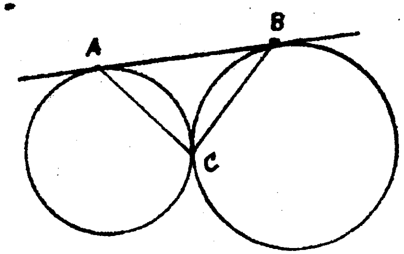
(4) 円の弦のうちで~~一番長~~いのは直径である。

(5) 1つの円が，平行2直線で切りとられる2つの弧の長さは相等しい。

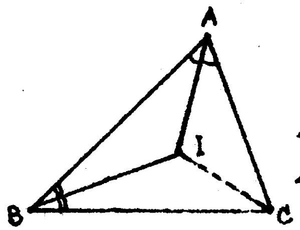
(6) 2円の交点A，Bを通って，2円の間にはさまれた2つの線分CAD，EBFを引けば，CFとDFとは平行である。



(7) C点で互に外接する2円へ，図のような共通接線ABを引けば∠ACBは直角である。



〔定理67〕 3角形の3つの内角の2等分線は，共点である。

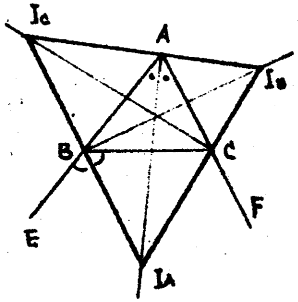


△ABC において，

$\left.\begin{array}{l}\angle BAI=\angle IAC\\ \angle ABI=\angle IBC\end{array}\right\}\rightarrow \angle ACI=\angle ICB$

〔註〕 I：内心という。

〔定理68〕 3角形の1つの内角の2等分線と，他の2つの外角の2等分線とは，共点である。

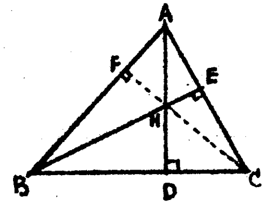


△ABC において，

$\left.\begin{array}{l}\angle BAI_A=\angle I_AAC\\ \angle EBI_A=\angle I_ABC\end{array}\right\}\rightarrow \angle BCI_A=\angle I_ACF$

〔註〕 I_A：傍心という。

〔定理69〕 3角形の3つの垂線は，共点である。

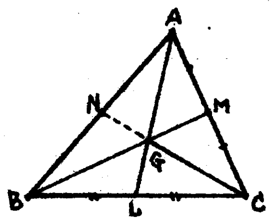


△ABC において，

$\left.\begin{array}{l}AD\perp BC\\ BE\perp CA\\ CF\perp AB\end{array}\right\}\longrightarrow$ AD, BE, CF；共点

〔註〕 H：垂心という。

〔定理70〕 3角形の3つの中線は，共点である。この点は中線を2：1の比に分ける。

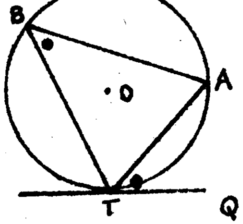


△ABC において，

$\left.\begin{array}{l}BL=LC\\ CM=MA\\ AL\cap BM=G\\ CG\cap AB=N\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}AN=NB\\ AG:GL\\ =2:1\end{array}\right.$

〔註〕 G：重心という。

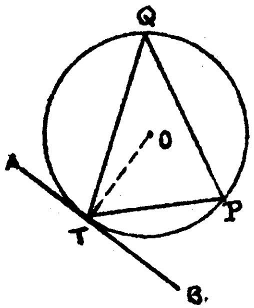
〔定理71〕 円の接線と，その接点を通る弦とのなす角は，この角内にある弧に対する円周角に等しい。



円O において，

TQ：Tでの接線 $\longrightarrow \angle ATQ = \angle ABT$

〔定理71〕系 円の弦と，その一端を通る直線とのなす角が，その角内の弧に対する円周角に等しいならば，この直線は接線である。

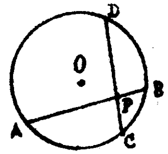


円Oにおいて，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB：円O上の点Tを通る。}\\ \angle PTB = \angle PQT\end{array}\right\} \longrightarrow OT \perp AB$

〔定理72〕 1点を通って1つの円と交わる2直線があるとき，各直線上で，この点から円との交点にいたる距離の積は相等しい。

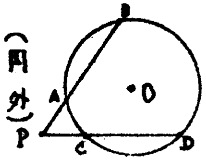
(円内)



円O において，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB,CD：弦}\\ AB \cap CD = P\end{array}\right\} \longrightarrow PA\cdot PB = PC\cdot PD$

(円外)

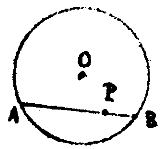


円O において，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB,CD：弦}\\ AB \cap CD = P\end{array}\right\} \longrightarrow PA\cdot PB = PC\cdot PD$

〔定理72〕系1 1点を通って1つの円と交わる任意の直線があるとき，その点から2つの交点にいたる距離の積は1定である。

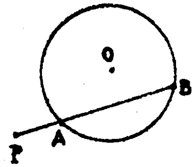
(円内)



円O において，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB：弦}\\ P \subset AB\end{array}\right\} \longrightarrow PA\cdot PB = r^2 - OP^2 = \text{Const.}$

(円外)

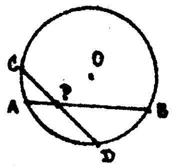


円O において，

$\left.\begin{array}{l}\text{AB：弦}\\ P \subset AB\end{array}\right\} \longrightarrow PA\cdot PB = OP^2 - r^2 = \text{Const.}$

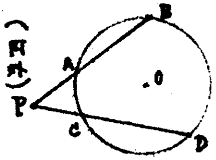
〔定理72〕系2　1点Pを通る2直線があるとき，ともにPの反対側，または同じ側に，PA·PB＝PC·PDなる点A，BおよびC，Dがあれば，4点A，B，C，Dは共円である．

（円内）



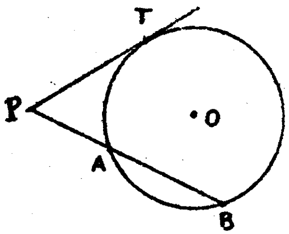
$PA \cdot PB = PC \cdot PD \rightarrow$ A，B，C，D：共円

（円外）



$PA \cdot PB = PC \cdot PD \rightarrow$ A，B，C，D：共円

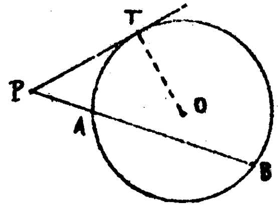
〔定理73〕　円外の1点から，1つの接線と1つの割線とを引けば，この点から割線上の交点に至る距離の積は，この点から接点に至る距離の平方に等しい。



円O において，

PT：接線
PAB：割線 $\rightarrow PA \cdot PB = PT^2$

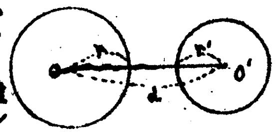
〔定理73〕系　1定点Pを通る2直線があるとき，その一方の直線上で，P点と同じ側に2点A，Bがあり，他の直線上に1点Tがあって，$PA \cdot PB = PT^2$ ならば，PTは円（A，B，T）の接線である。



$PA \cdot PB = PT^2 \rightarrow OT \perp PT$

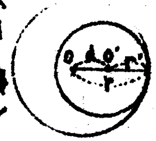
〔定理74〕　2円O，O′の半径をr，r′，OO′の長さをdとすれば，つぎの関係式が成立する。（逆も成立する．）

（分離）



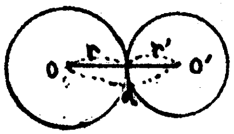
$\leftrightarrow d > r+r'$

（内接）



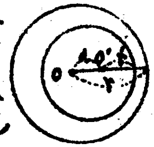
$\leftrightarrow d = r-r'$

（外接）



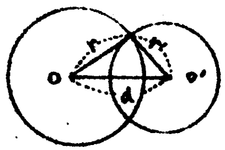
$\leftrightarrow d = r+r'$

（包含）



$\leftrightarrow r-r' > d$

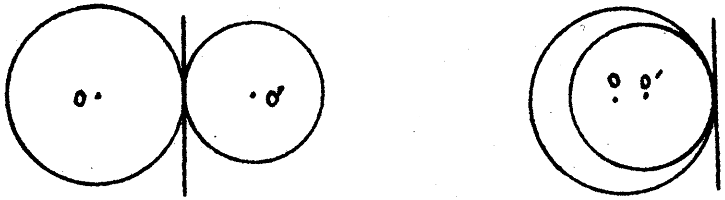
（相交）



$\leftrightarrow r+r' > d > r-r'$

〔定理74〕の補助定理

〔H・T・1〕 2円が接するとき，接点での共通接線は唯一存在である。



〔H・T・2〕 2円が接するとき，2円の中心を結ぶ直線は接点を通る。

問題 7

(1) 直角三角形の外心は，斜辺の中点である。

(2) 任意の三角形の5心を作図せよ。

(3) $\triangle ABC$ において，

内心を I とすれば，$\angle BIC = \angle R + \frac{1}{2}\angle A$

$\angle A$内の傍心を I_Aとすれば，

$$\angle BI_AC = \angle R - \frac{1}{2}\angle A$$

(4) $\triangle ABC$ の垂心を H とするとき，$\triangle HBC$，$\triangle HCA$，$\triangle HAB$の垂心はどこか。

(5) $\triangle ABC$ の内心を I，傍心を I_A, I_B, I_C とすると，I は $\triangle I_AI_BI_C$ の垂心である。

(6) $\triangle ABC$ の底辺 BC の両端から対辺へ下した垂線が等しいときは，AB＝AC である。

(7) 三角形の1辺の中点が，他の2辺から等距離にあるときは，この三角形は2等辺である。

(8) ▱ABCD の辺 BC，CD の中点をそれぞれ P，Q とすれば，AP，AQ は対角線 BD を3等分する。

(9) 正三角形の外心，内心，重心，垂心は一致する。

(10) 内心と重心との一致する三角形は，正三角形である。

(11) 三角形ABC の角Aの2等分線が，BC と交わる点をD，外接円と交わる点をEとすれば，

$$AB\cdot AC = AD\cdot AE$$
$$AB\cdot AC = AD^2 + BD\cdot DC$$

である。

(12) △ABC の内心 I を通って辺 BC に平行な直線が，辺 AB, AC と交わる点を M, N とすれば，

$$MN = BM + CN$$

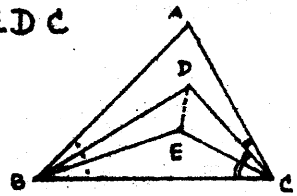
である。

(13) 同じ円または相等しい円において，その弦の長さは，円の中心に近い程長く，直径は最大の弦である。逆も成りたつ。

(14) △ABC において，BD, BE は角 B の3等分線，CD, CE は角 C の3等分線であって，E は辺 BC に近い方の点とすれば，

$$\angle BDE = \angle EDC$$

である。



(15) 右の図で，A, B, C, D, E は円周上の点，AB と AE は円の接線．

AE // BC，CD = DE

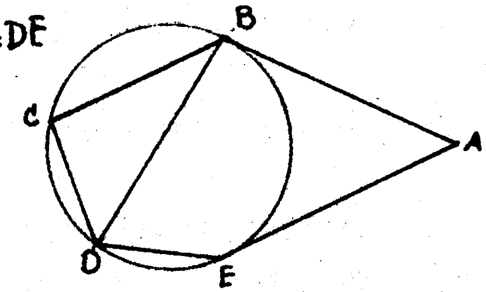
∠BAE = 52°

である．

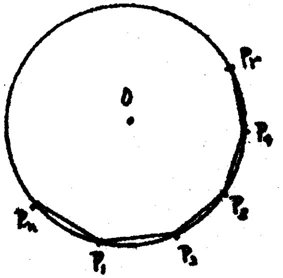
次の角の大きさを求めよ．

① ∠CBD

② ∠BCD



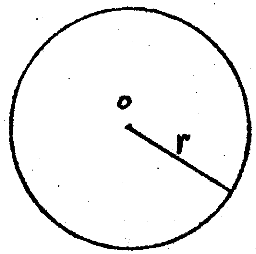
〔定理75〕 円周をn等分する点を順次に結んでできるn角形は，正n角形である。



円O において，

P_r：円Oの周をn等分した点 $\longrightarrow \begin{cases} \angle P_1 = \angle P_2 = \cdots = \angle P_n \\ P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_nP_1 \end{cases}$

〔定理76〕系 半径rの円の周は，2πrに等しい。

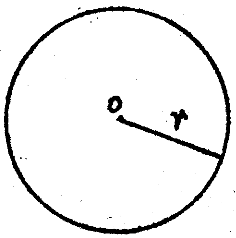


S：円周の長さ

円O において，

$$S = 2\pi r$$

〔定理76〕 いかなる円においても，その円周の長さと直径との比は，一定である。（この比の値をπであらわす。）

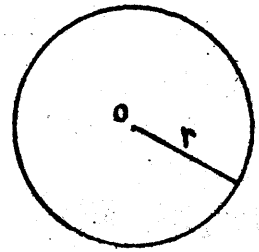


S：円周の長さ．

円O において，

$$\frac{S}{2r} = \pi \quad (\text{Const})$$

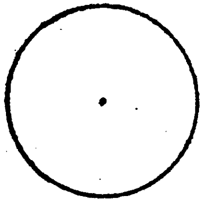
〔定理77〕 半径rの円の面積は，πr^2である。



円O において，

$$S_{\odot} = \pi r^2$$

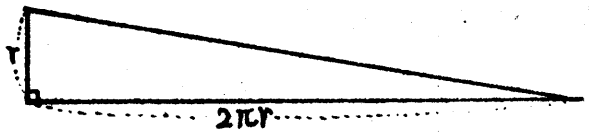
〔定理77〕系1　円の面積は，直角をはさむ辺の長さが，それぞれ半径と円周に等しい直角三角形の面積に等しい。



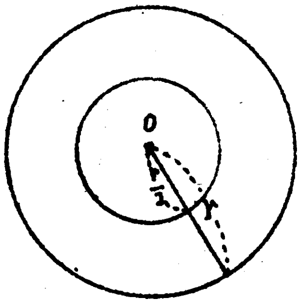
$$S_{\odot} = S_{\triangle}$$

ただし

$$S_{\odot} = \pi r^2 \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

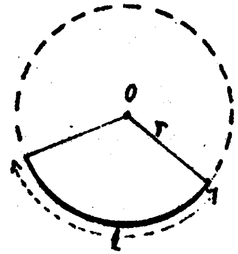


〔定理77〕系2　円の面積は，その円の半径の$\frac{1}{2}$を半径とする円の周に，その円の半径をかけたものに等しい。



$$S_{\odot} = [\text{半径}\frac{r}{2}\text{の円の周}] \times r$$

〔定理77〕系3　扇形の面積は，弧の長さと半径との積の半分に等しい。

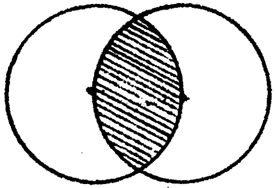


$$S = \frac{1}{2} l r$$

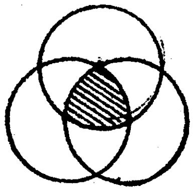
問　題　8

(1) 次の図形の斜線の部分の面積を求めよ。ただし円の半径は r，正方形の一辺は a とする。

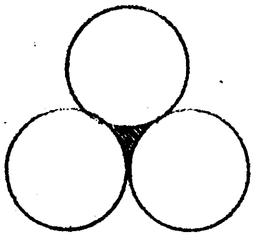
①



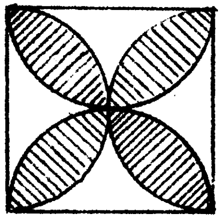
②



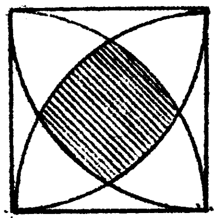
③



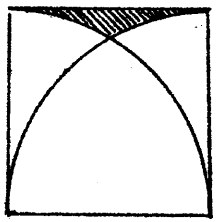
④



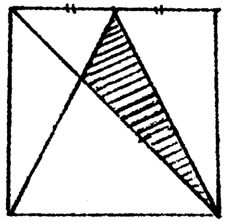
⑤



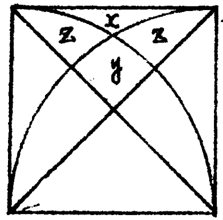
⑥



⑦

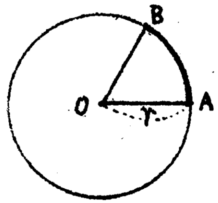


⑧



x, y, z を求めよ.

(2) 中心が O，半径が r の円において，円周上に半径の長さに等しい弧 AB を切りとれば，∠AOB は半径の如何にかかわらず一定である。(この一定の角の大きさを 1 弧度，又は 1 Radian という。)



$\overset{\frown}{AB} = r$

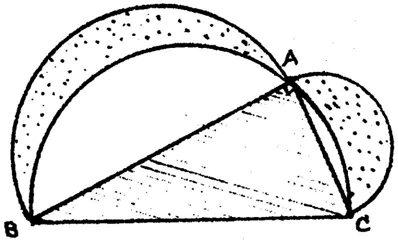
$\angle AOB = \text{const.}$

(3) $1\,\text{Rad} = \dfrac{180^\circ}{\pi}$，$\pi\,\text{Rad} = 180^\circ$ であることを証明せよ。

(4) 半径 r, 中心角 θ Rad の扇形の弧の長さ l は, $l = r\theta$ で与えられ, 面積 S は, $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ で与えられる.

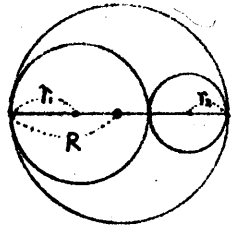
(5) ∠A が直角である直角三角形 ABC の各辺上に, △ABC の外側に各辺を直径とする半円をかけば, AB 上の半円の面積と AC 上の半円の面積との和は, BC 上の半円の面積に等しい。

(6) ∠A が直角である直角三角形 ABC の各辺上に, BC の同じ側に半円をかけば 2つの月形の面積の和は, △ABC の面積に等しい。(ヒポクラテスの定理)



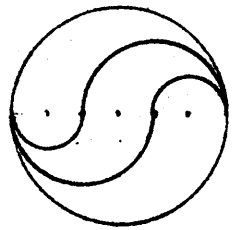
$S_◗ + S_◗ = S_\triangle$

(7) 大円の直径上にあつて, 互に外接しながら大円に内接する2つの小円の周の和は大円の周と等しい。



$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi R$

(8) 下の図は, 曲線で円の面積を3等分する方法を示したものである。その理由を考えよ。



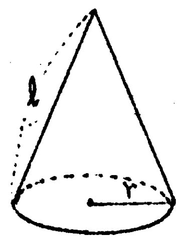
3つの円の半径

大円 : R

中円 : $\frac{2}{3}R$

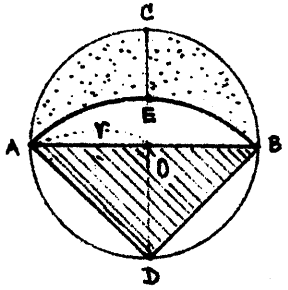
小円 : $\frac{1}{3}R$

(9) 右の図の直円錐の側面積を求めよ。



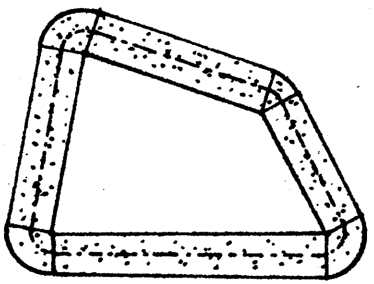
(10) 円の直交する直径をAB，CDとする。Dを中心にADを半径とする円と，CDとの交点をEとする。

ACBとAEBとで囲まれた三日月形の面積は，△ABDの面積に等しい。

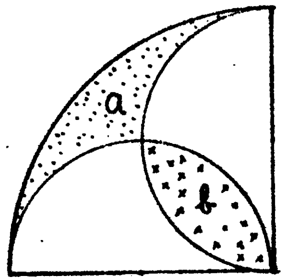


$$S_{\frown} = S_{\blacktriangledown}$$

(11) 下図のように，円弧と直線でできた定幅の道路の面積は，道路の中心線の長さに道路巾をかけたものに等しい。



(12) 下の図は，線分と円弧でできた図である。a，b 2つの面積が等しいことを証明せよ。



(13) 次の〔 〕にあてはまる有理数は何か。
AB＝2，BC＝4 なる長方形の内部で，点Aからの距離が $2\sqrt{2}$ と4の間にある部分の面積は，

$$〔\quad〕\pi + 〔\quad〕\left(\sqrt{〔\quad〕} - 1\right)$$

である。（37 東大入試）

[基本作図題]

ソフィストたちは，このような図をかくのに使う道具を，定木とコンパスとに制限しました。そのうえ，定木は直線を引くためにだけ，コンパスは円をえがくときだけ，使うべきであるとしました。こうした制限のもとで彼らは作図問題も熱心に研究しました。

19世紀になるまである数学者たちは，定木とコンパスを万能の道具と考え，この2つを使えばどんな作図題でも解けると信じていた。このような先入観は，かの3問題の解にぼう大な努力を払わせてしまいました。

われわれは，この古典的な道具を有限回使うという制限をはずせば，一般角の3等分も簡単に解けることを示してみよう。なお，作図題に興味ある諸君は，

スモゴルジエフスキー著 安香・矢島訳

定木による作図　東京図書　数学新書

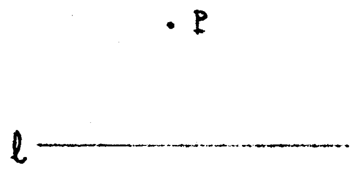
コストフスキー著 松野訳

コンパスによる作図　東京図書　数学新書

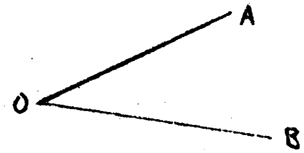
で研究しなさい。

[作図題1]　与えられた線分を2等分せよ。

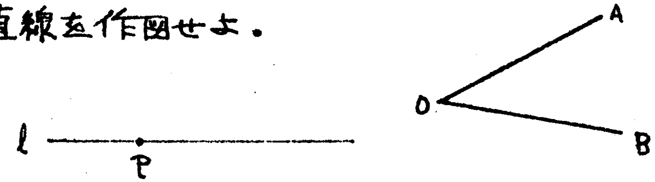
[作図題2]　与えられた点から，与えられた直線に垂線を引け。



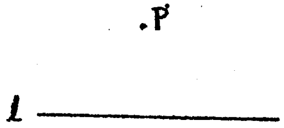
[作図題3]　与えられた角を2等分せよ。



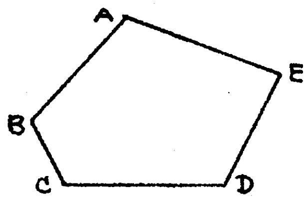
[作図題4]　与えられた直線上の与えられた点を通って，これと与えられた角をなす直線を作図せよ。



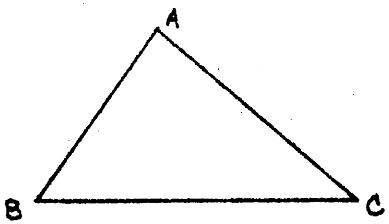
〔作図題5〕 与えられた直線外の与えられた点を通って，この直線に平行な直線をひけ。



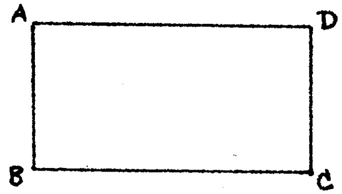
〔作図題6〕 与えられた多角形と面積の等しい3角形を作図せよ。



〔作図題7〕 与えられた3角形と面積の等しい長方形を作図せよ。



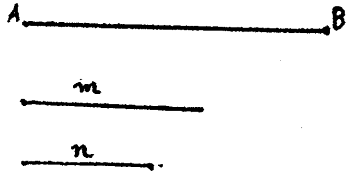
〔作図題8〕 与えられた長方形と面積の等しい正方形を作図せよ。



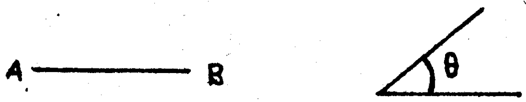
〔作図題9〕 与えられた線分をn等分せよ。

($n=5$)

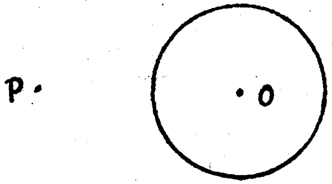
〔作図題10〕 与えられた線分を，与えられた比に内分又は外分せよ。（$m:n$）



〔作図題11〕与えられた線分を弦として，その上に与えられた角を含む弓形を作図せよ。

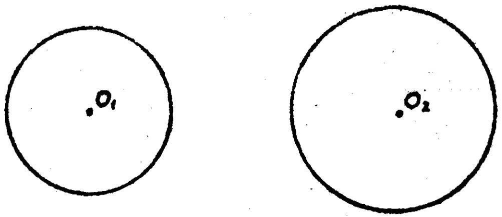


〔作図題12〕与えられた点から，与えられた円へ接線を引け。

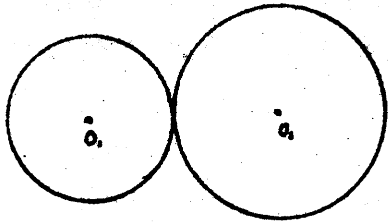


〔作図題13〕与えられた2つの円に共通接線を引け。

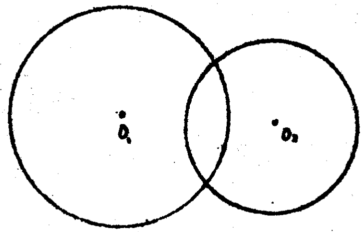
1



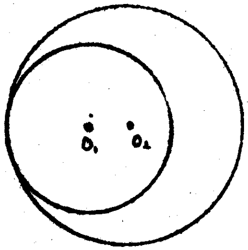
2



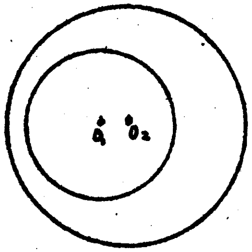
3



4

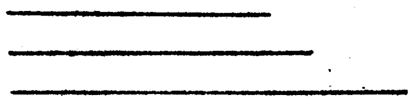


5

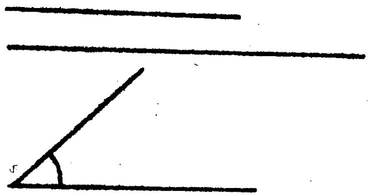


問　題　9

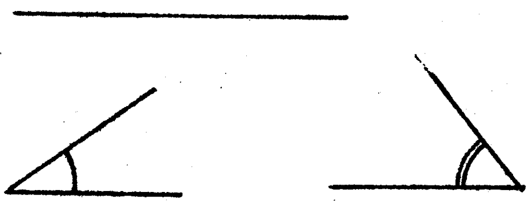
(1)　3つの辺の長さを与えて，三角形を作図せよ。



(2)　2辺と，その夾角を与えて，三角形を作図せよ。



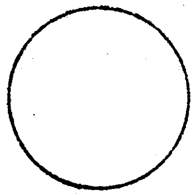
(3)　1辺と，その両端における内角を与えて，三角形を作図せよ。



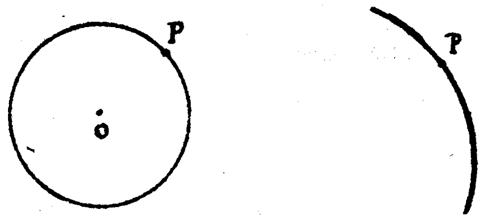
(4)　1辺を与えて正方形を作図せよ。

(5)　与えられた弧を2等分せよ

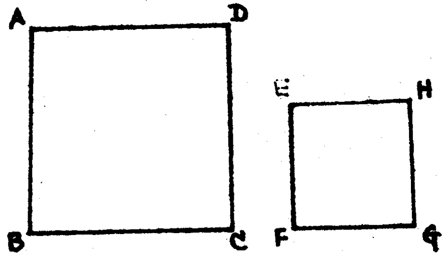
(6)　与えられた円の中心を求めよ。



(7)　与えられた円周上の1点で，この円への接線を引け。



(8) 与えられた2つの正方形の面積の和，又は差を面積とする正方形を作図せよ。



(9) ∠AOB 内に1点Pが与えられている。Pを通る1直線を引き，これがOA, OBと交わる点をそれぞれL, Mとするとき，PがLMの中点になるようにせよ。

(10) △ABC の辺BCに平行な直線をひき，AB, AC との交点をそれぞれD, Eとするとき，

$$DE = BD + CE$$

となるようにせよ。

(11) 1頂点から出る2辺の長さと，中線の長さを与えて，三角形を作図せよ。

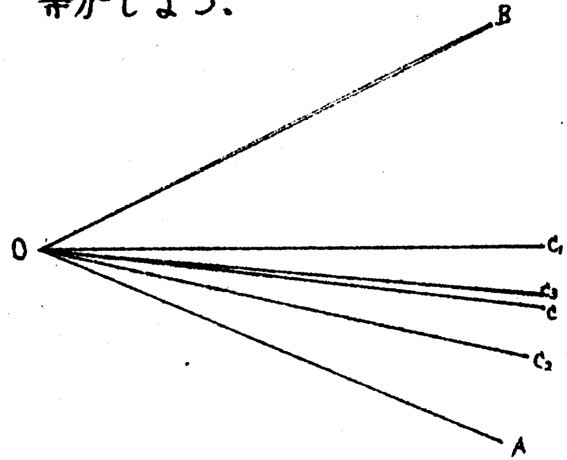
(12) 三角形を与えて，5心を作図せよ。

(13) 大きさの異なる3つの円の関係位置を図示せよ。（たくさんある）

[研究 NO.1] 一般角の3等分

定木とコンパスを有限回使うという制限をはずせば，一般に角の3等分できることを示してみましょう。

1 定木とコンパスを無限回使って角を3等分しよう。



上図で，OC_1：∠AOBの2等分線（定木，コンパス）

次に，OC_2：$\angle AOC_1$の2等分線（〃，〃）

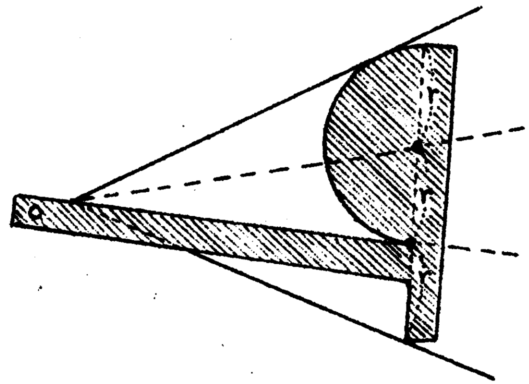
更に，OC_3：$\angle AOC_2$の2等分線（〃，〃）

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

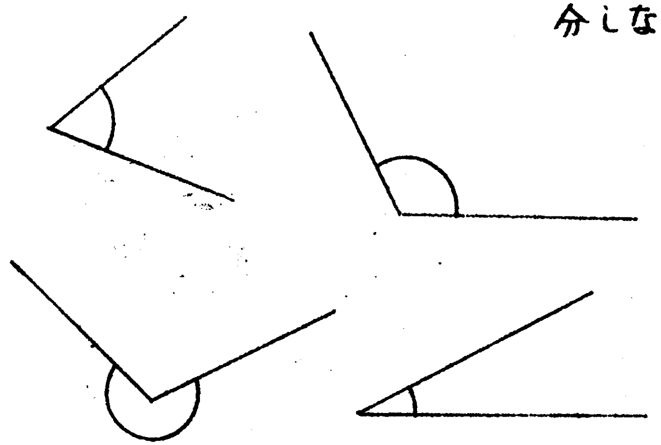
このような操作をくりかえしていくと，OC_nはどうなるでしょうか。（ただし，OCは∠AOBの3等分線とする。）

（ヒント）$\angle C_1OC$，$\angle C_2OC$，$\angle C_3OC$，・・・，$\angle C_nOC$，の大きさ。

2 下図に示すような型紙を使って，角の3等分ができます。理由を考えなさい。



型紙を作つて，次の与えられた角を3等分しなさい。



IV　プラトー学派（Plato 427〜347 B.C）

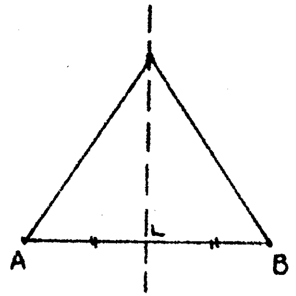
サラミス湾の海戦で，ペルシャの大軍を破り，ギリシャ地方から東洋人を追い払って50年，アテネを中心に文化も産業も栄えました。ところが，アテネの民主々義に対してスパルタの貴族主義は，なにかにつけて反目し，ついに，ペロポネソス戦役となって，431年から404年まで戦いました。結果は，アテネの敗北に終りました。しかし，アテネの国は破れましたが，文学・科学・哲学はますます盛んになりました。そして，あの有名な哲学者Sokrates（468〜399），その弟子Plato等の学者が続々とあらわれたのでした。

Plato はSokratesが毒殺されてから，諸国を旅行し，多くの哲学者や数学者と交わり389年頃帰って，アテネのアカデミアの森に学校を開き，弟子の養成と本を書くことに生涯をささげました。彼は，図形の学問，幾何学を非常に大切にし，学校の玄関に“幾何学を知らないものは，この門から入ってはいけない。”と大きな字で書いたそうです。

Plato は，その弟子たちに立体の研究をすすめました。今まで研究されていたピラミッド，正多面体の他に，角柱，角錐，円柱，円錐なども研究しました。Plato は数学の専門家でなかったが，このころ数学者でEudoxus（408〜355）が有名でした。彼は，Plato と同じくPythagoras学派のArkhytas（400〜365）の教えをうけ，また，Plato といっしょにエジプトに旅行し，帰国して，シジクスに学校を開き，天文学，幾何学，医学，法律等を教へ，とくに幾何学では，比例の理論，角柱，角錐，円柱，円錐，球の体積等を研究しました。

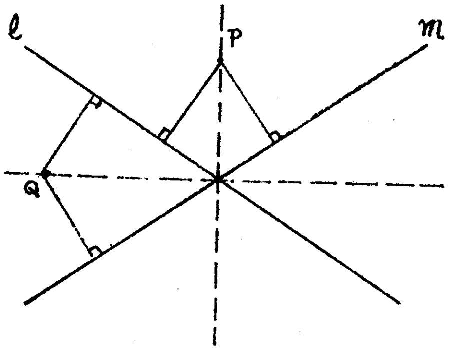
Eudoxus の門人の中で有名なのはMenaechmus（375〜325）です。彼はのちにはPlatoの学校に入りました。アレキサンドル大帝の先生になりました。ある日大帝に“幾何学に王道はありません。”といった話は有名です。彼は，直円錐をいろいろな平面で切った切口の曲線（円錐曲線）を研究しました。

〔定理78〕 2定点から等距離にある点の軌跡は，これらの2点を結ぶ線分の垂直2等分線である。

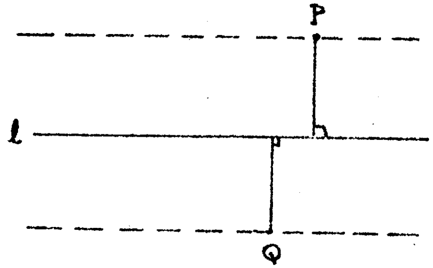


〔註〕軌跡は，破線でかくことにしましょう。

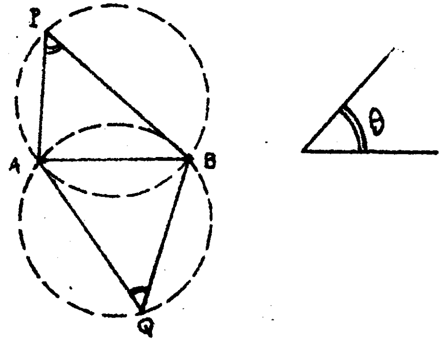
〔定理79〕 相交わる2直線から等距離にある点の軌跡は，これら2直線のなす角を2等分する2つの直線である。



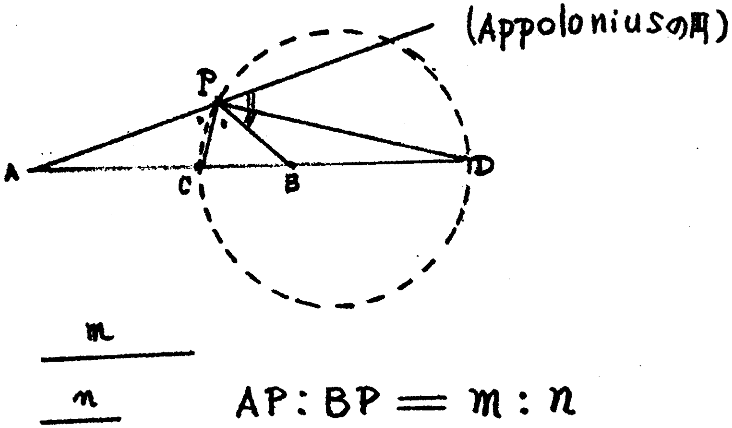
〔定理80〕 定直線から，一定の距離にある点の軌跡は，その直線から等距離にある2つの直線である。



〔定理81〕 与えられた線分を一定の角に見込む点の軌跡は，その線分を弦として，その定角を含む2つの弓形である。



〔定理82〕　2定点からの距離の比が，1でない与えられた比に等しい点の軌跡は、この2定点を結ぶ線分を，与えられた比に内分および外分する点を直径の両端とする円である。

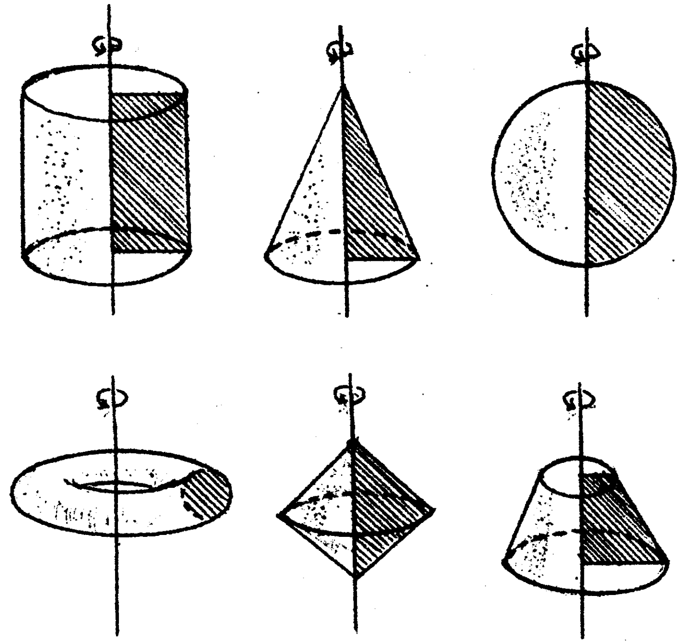


AP : BP ＝ m : n

回転体

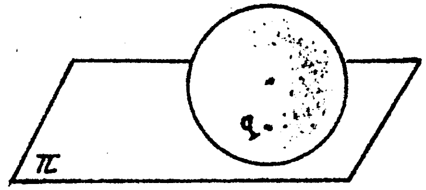
ある閉曲線が，1直線を軸として1回転してできる立体を回転体と呼びましょう。

この定義に従うと，直円柱，直円錐，球，環などは，次のように作図できます、

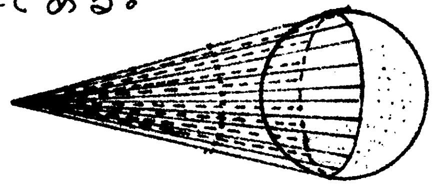


球，平面，直円錐の関係位置

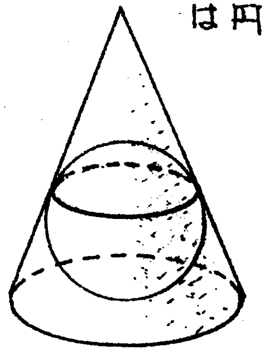
〔性質Ⅰ〕 球と平面とは，ただ1点で接する。



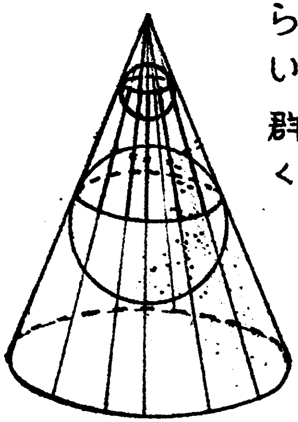
〔性質Ⅱ〕 1定点から球への接線は無限に引ける。ただし，定点から接点までの距離は一定である。



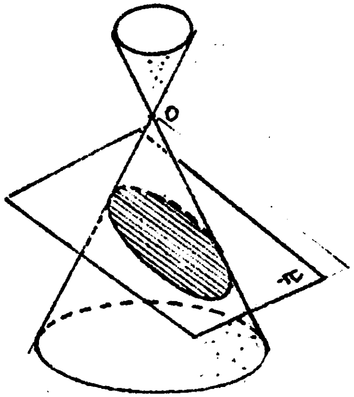
〔性質Ⅲ〕 球が直円錐に内接するとき，接点は円になる。



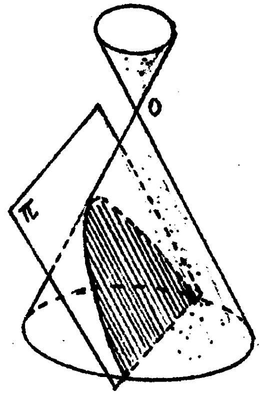
〔性質Ⅳ〕 2つの球が直円錐に内接するとき，母線が2つの接点で切りとられる線分の長さは相等しい。この切りとられた母線群は，直円錐の側面を形づくる。



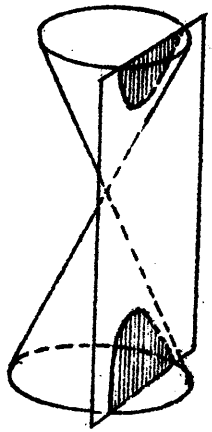
〔定理83〕 直円錐を，その傾斜が母線と底面とのなす角よりも小さな平面で切ると，切口の曲線は楕円である。



〔定理84〕 直円錐を，その傾斜が母線と底面のなす角に等しい平面で切ると，切口の曲線は放物線である。

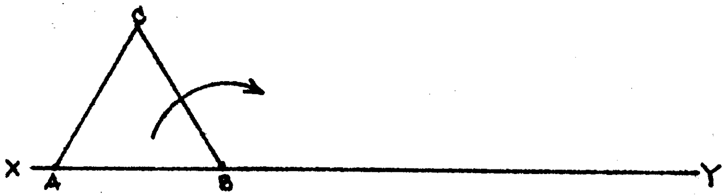


〔定理85〕 直円錐を，その傾斜が母線と底面のなす角より大きい平面で切ると，切口の曲線は双曲線である。

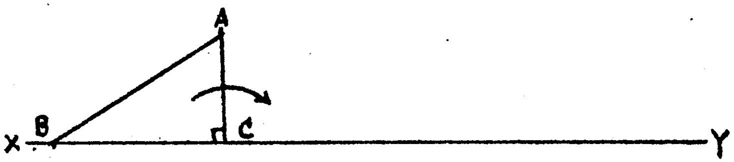


問　題　10

(1)　直線XY上を，1辺がaの長さの正3角形がころがるとき，1頂点Aの軌跡を求めよ。又，その長さを計算せよ。

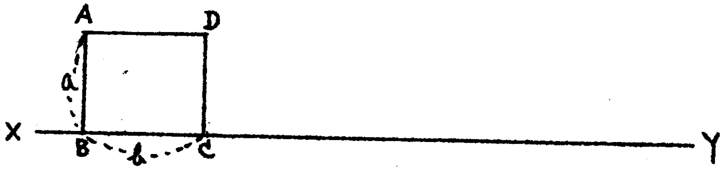


(2)　直角3角形ABCが，直線XY上をころがるとき，3頂点の軌跡を求めよ。

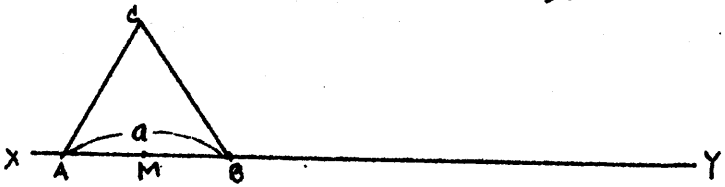


(3)　1辺の長さaの正方形が，直線XY上をころがるとき，1頂点の軌跡の長さを計算せよ。

(4)　2辺の長さa,bの矩形が，直線XY上をころがるとき，各頂点の軌跡を求め，その長さを計算せよ。



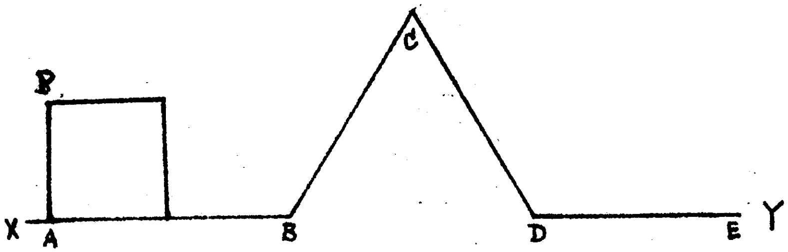
(5)　直線XY上の線分ABを底辺とする正3角形ABCが，XY上を1回転するとき，底辺ABの中点Mの画く曲線をかき，かつこの曲線とXYとの間の面積を求めよ。



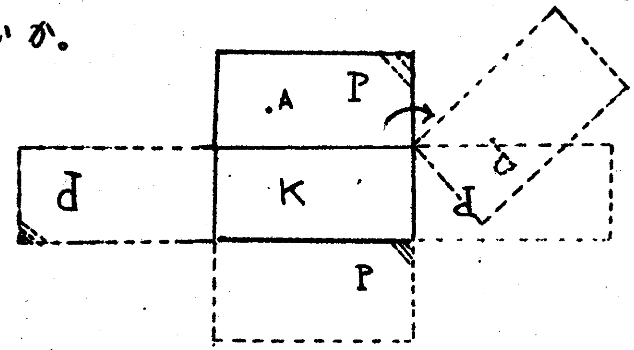
(6)　1辺の長さがaの正6角形が，1直線上をころがるとき，1頂点の軌跡を求め，その曲線と1直線とでかこまれた部分の面積を計算せよ。

(7)　1辺の長さaの正6角形が，直線XY上をころがるとき，頂点Aの軌跡を求めよ。軌跡の長さを計算せよ。又，軌跡とXYでかこまれた部分の面積を求めよ。

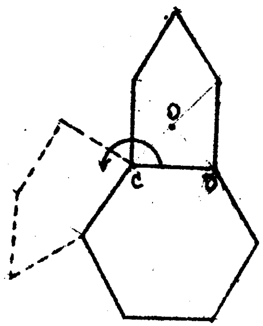
(8)　1辺が4cmの正方形が，折線（AB=8cm, BC=8cm，正3角形BCD，）上をころがるとき，P点の軌跡を図示し，その長さを計算せよ。



(9)　長方形Kがある。Kのまわりに，これと合同な長方形Pを次次に辺が重なるようにまわして1回転するとき，P内の1点Aの動く道をかけ。又，この道を最小にするには，AはP内のどこにとればよいか。



(10)　5角形ABCDE（正方形・正3角形の合成）を，辺の長さ同じ（acm）の正6角形の外側を図のようにまわすとき，辺CDが再び正6角形の1辺と重なる位位にくるまでに，正方形の中心Oの通った道をかけ。又，その全長を求めよ。



V. アレクサンドリア学派 Euclid 300? Archimedes 287?

ペロポネソス戦役で敗れたアテネも勝ったスパルタも，ともに疲れきったところを，マケドニヤの Philip (382～336) に征服されてしまいました。Philip の子 Alexander (356～323) は，世界征服を志して，西はイタリアから東はインドにいたる大きな国家を建設しました。そして，エジプトのナイル川のほとりにアレクサンドリアと呼ぶ都をつくりギリシヤの文明を移植しました。

それ以来，アレクサンドリアは，政治，経済，文学，芸術，科学，哲学の中心として栄え人口100万に近い大都市になったといわれています。

Alexander大王の死後も，このアレクサンドリアは，エジプトのトレミー王のもとでますます栄え，図形の学問，幾何学も，アレクサンドリア学派から Euclid, Archimedes などの大学者の出現によって，研究が大いに進みました。

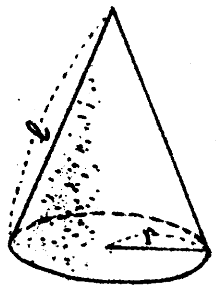
Euclid は，幾何学を理論的にまとめあげて13巻の"原本"と呼ばれる書物を著しました。それ以来この書物は，2000年余りの間，図形の標準的な教科書として世界各国の人々に愛読されました。"原本"は，厳密に幾何学を組みたてることをこころみていますので，トレミー王が"原本はめんどうくさいが，もっと楽に幾何学を学習する道はないか。"とEuclid に聞きましたら，彼は"幾何学に，王道はありません。"と答えたという逸話がつたわっています。

Archimedes のことについては，皆さんも，王冠が純金でないのを見破った話，軍艦を歯車と綱で進水させた話など聞いているでしょう。彼は，マルセルスの引いたローマの大軍が，シラキウスの町を攻めたとき，図形の研究に熱中していて，ローマ兵に殺されてしまいました。敵将マルセルスは，部下がArchimedesを殺したことを大変残念がりました。彼の幾何学での研究は，円の面積，球，球帯，球帽，直円錐などの表面積，球，直円錐の体積などであります。

〔定理86〕 直円錐の半径および母線の長さを，それぞれ r, l とすれば，

$$側面積 = \pi r l \quad ,\ 表面積 = \pi r(l+r)$$

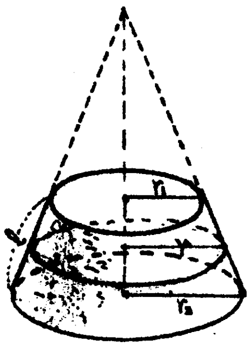
である。



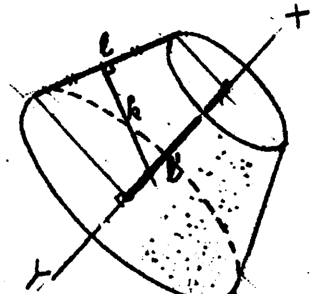
〔定理87〕 直円錐台の両底面の半径および母線の長さを，それぞれ r_1, r_2, l とすれば，

$$側面積 = \pi(r_1 + r_2)l = 2\pi r l$$

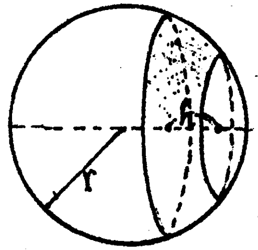
ただし r：両底面から等距離にある截口の半径．



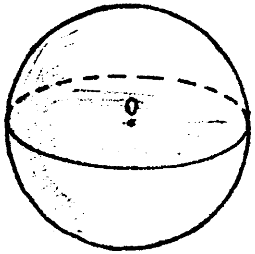
〔定理88〕 長さ l の1つの線分の同一平面上にある直線XYへの正射影を l' とし，線分 l の中点とこの垂直2等分線がXYとの交わる点との距離を h とする。今 l がXYの周りに1回転してできる面積を S とすれば， $S = 2\pi h l'$ である。



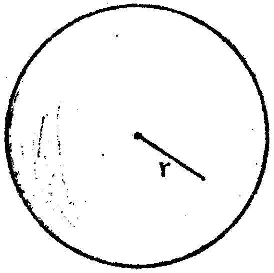
〔定理89〕 球帯の側面積は，大円の周と高さとの積である。（Pythagorasの発見）



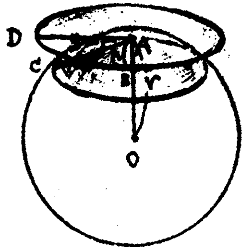
〔定理90〕 球の表面積は，大円の面積の４倍である。



〔定理91〕 半径 r の球の体積は，$\frac{4}{3}\pi r^3$ である。

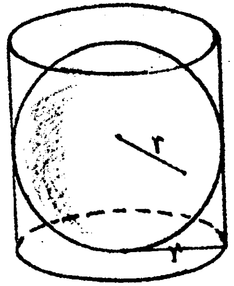


〔定理92〕 球帽の表面積は，その中心から，底円の周上の１点に至る距離を半径とする円の面積に等しい。



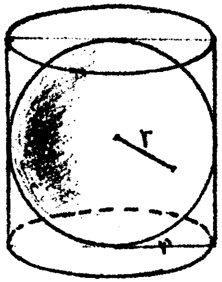
球帽の表面積 : $S_{\circ}$
半径AC(=AD)の円の面積 : $S_{\odot}$
$\rightarrow S_{\circ} = S_{\odot}$

〔定理93〕 球の表面積は，それに外接する直円柱の全表面積の $\frac{2}{3}$ である。



球の表面積 : $S_{\circ}$
直円柱の表面積 : $S_{\boxminus}$
$\rightarrow S_{\circ} = \frac{2}{3} S_{\boxminus}$

〔定理94〕　球の体積は，それに外接する直円柱の体積の $2/3$ である。

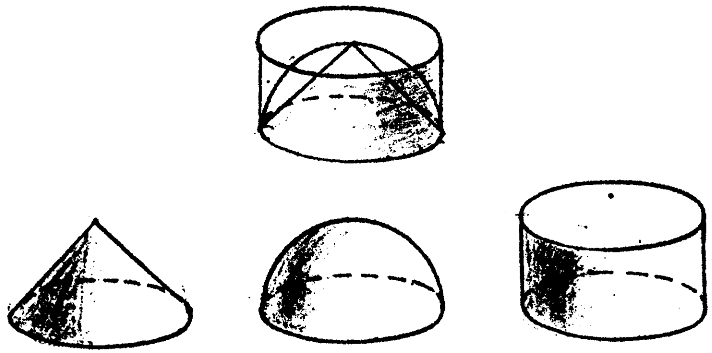


球の体積：$V_{\circ}$

円柱の体積：$V_{\square}$

$$V_{\circ} = \frac{2}{3} V_{\square}$$

〔定理95〕　半球に内接する直円錐と，その半球と，その半球に外接する直円柱との体積の比は，1：2：3 である。(1934 西塚)



1　：　2　：　3

あとがき

私たちは，図形の学問，幾何学が，エジプトのナイル河のほとりに生まれてから，イオニア列島，南部イタリア，ギリシア（アテネ）と，つぎつぎに移されながら，だんだん成長して，また，もとのエジプトのアレクサンドリアへ文派になって帰ってきたところまでを定理を中心に学習しました。

ふりかえってみますと，最初は土地測量の必要から生れ，イタリア，ギリシアに渡って実用をはなれて育ちました。それは、アテネの人々の生活が，奴隷制の上にうちたてられていたから幾何学も自然と実利実用から離れたのでしょう。ですから当時のギリシア文化は，ギリシアの地のみのせまい自然観，世界観の中だけではぐくまれました。

ところが，Alexander大王の野望と共に，大王の征くところ，ギリシア文化の種子は蒔かれ，アテネの城壁を越えて，アジアに，ヨーロッパに，エジプトに花を咲かせました。それは，ギリシア時代の神秘的なものを脱皮して実用的な方面への発展を意味しました。

その後，歴史の流れと共に，ローマ，ヨーロッパと渡り，さらに見事に成長をとげて今日にいたりました。

しかし，このノートが余りにも，定理中心にできていたので，皆さんは，図形の生いたちの歴史的背影からの必然性をみのがしがちだったかも知れません。もし，そうだったら，西洋史をよんで，このノートを理解しなおしてほしいと思います。

こうした，2面からの理解を通してのみ，幾何学は，皆さん自身のものとなり，更に，発展させることが可能なのであります。

私は，これにつづくノートで，今まで，皆さんが学習された“証明”を通して，いろいろな問題を，例えば，Euclidの原本，正多面体とオイラーの定理，ヘロンの公式，チェバ・メネラウスの定理，回転移動，5色定理などを取扱ってみたいと思います。

目　次