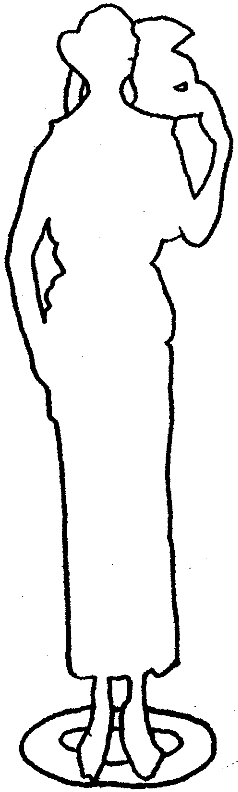
幾何学ノート NO.3

空間幾何学から座標幾何学へ



ガスパール・モンジュ（1746~1818）の天才によって創造された画法幾何学は綜合幾何学の前線に立って、その進歩に対する大道をひらいてくれた。

（カジョリ初等数学史(下) P.223）

1966.11.3

桑名市本郷　アテネ会館

アテネ会　　西塚 茂雄

空間幾何学から画法幾何学へ

§1 はじめに

ここでは、立体図形を、定義、公理、定理、問題と論証を中心に、系統的に展開していきたいと思います。

具体的には、直線ー平面ー角柱ー円柱ー角錐ー円錐ー球そして投影法と進めたいのですが、時間の都合で、直線ー平面ー投影と途中の論証をはしょって画法幾何学に重点をおくことになりそうです。

数学を学ぶ上に"論証"は大切で、この国の学校のような不徹底な学び方では心配です。では、論証だけを充分学習すればよいかと申しますと、それのみではかたよりすぎましょう。そこで、もう1つ大切なことは、その学問の歴史的，社会的な背景をも学ぶことです。どんなにすばらしい数学的発明，発見も，その数学者個人の天才に心引かれているだけでは，学問をする態度とは申せません むしろ その発見した定理（数学的事実）の歴史的，社会的な背景の中での位置づけがもっと大切なのです。

要するに、どんな学問も、それを理論的に系統だてると共に、歴史的（社会的）な意味を学びとるとき、みなさんの中に、生きた学問として、成長し発展しつづけるのです。

そこで，私は，このプリントで 空間幾何学を理論的に組立てつゝ歴史的，社会的な面もときたいと思いますが，時間が少いので 前者が主となって，後者が従になりそうです。そこで 後者の方は，みなさんで

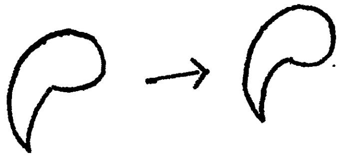
フロリアン・カジョリー 著
小倉金之助 補訳
初等数学史（上下）

で補って下さい。

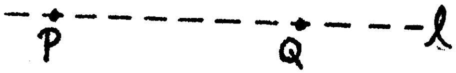
1966.11.17

§.2　公理群

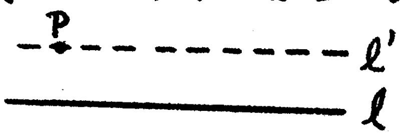
〔K1〕 図形は、その形および大きさを変えないで，任意の位置に移動することができる。



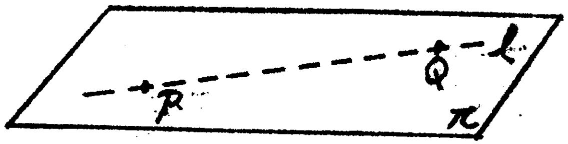
〔K2〕 2点を通る直線は，唯一存在である．



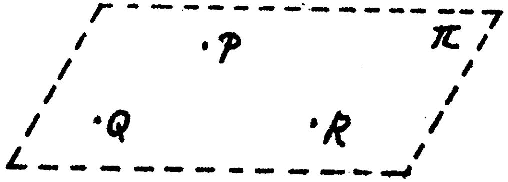
〔K3〕 1直線外の1点を通って、この直線に平行な直線は，唯一存在である。



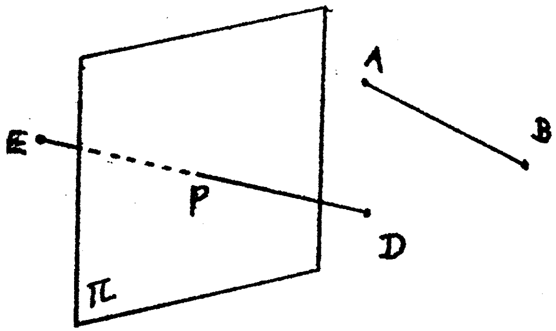
〔K4〕 1平面と2点を共有する直線は，全くその平面に含まれる．



〔K5〕 1直線上にない3点を通る平面は，唯一存在である。



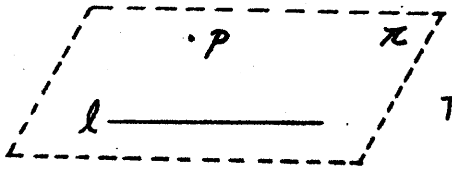
〔K6〕 1平面は空間を2つの部分にわける。すなわち，同じ側の2点を結ぶ線分は，この平面と共有点を持たず，反対側の2点を結ぶ線分は，この平面と1点を共有する。



〔定義〕 2直線が平行 とは、2直線が同一平面上にあって交わらないことである。

§3　基礎定理

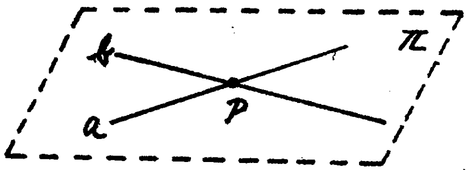
〔T.1〕1直線とその直線外の1点を含む平面は，唯一存在である。



$\pi=\{P,l\}\to\exists_1\pi$

〔註〕$\pi=\{P,l\}$ とは，Pとlとで決定する平面πをあらゆすことにしよう。
　$\exists_1\pi$ とはπ平面が唯一存在であることをあらゆすことにしよう。

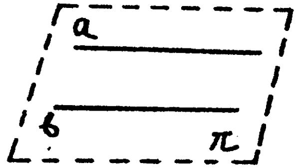
〔T.2〕1点を通る2直線は，1平面を決定する。（相交わる2直線は，1平面を決定する。）



$\left.\begin{array}{l} a\cap b=P \\ \pi=\{a,b\} \end{array}\right\}\to\exists_1\pi$

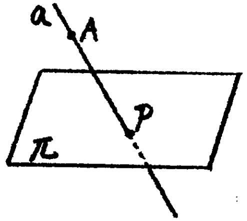
〔註〕$a\cap b=P$：2直線a, bが1点Pで交わることをあらわし　$a\cap b=0$ は交わらないことをあらゆすことにしよう。

〔T.3〕互に平行な2直線は，1平面を決定する。



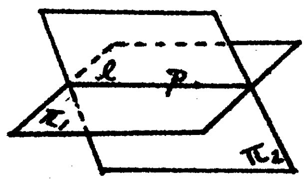
$\left.\begin{array}{l} a /\!/ b \\ \pi=\{a,b\} \end{array}\right\}\to\exists_1\pi$

〔T.4〕平面上の1点と，この平面外の1点とを結ぶ直線は，必ず存在し，この平面と直線とは唯だ1点のみを共有する。



$\left.\begin{array}{l} A\notin\pi\supset P \\ a=\{A,P\} \\ a\cap\pi=P \end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l}\exists a \\ \exists_1 P\end{array}\right.$

〔T.5〕1点を共有する相異なる2平面は，唯だ1つの直線を共有する。



$\pi_1\supset P\subset\pi_2\longrightarrow\exists_1 l$

§.4 練習問題1

(1) 1つの平面を決定する条件をのべよ。

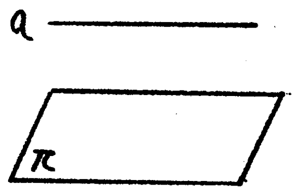
(2) 2つづつ、相異なる2点で交わる3直線は、同一平面上にある。

(3) 2つづつ、互に平行な3直線が、何れも第4の直線と交わるときは、この4本の直線は、みな同一平面上にある。

(4) 何れの3点も、同一直線上にない4点から、3点ずつとれば、幾つの平面を決めるか。

§.5 直線と平面との平行

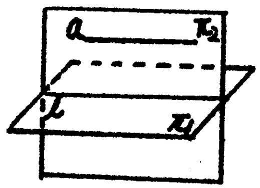
〔定義〕 1直線と1平面とが共有点をもたないとき、直線と平面とは互に平行であるという。



$a \parallel \pi$

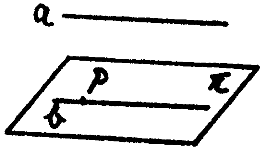
問 空間における1直線と1平面との関係位置は、幾通りあるか。

[T.6] 1つの平面と、これに平行な1つの直線を含む平面との交線は、その直線に平行である。



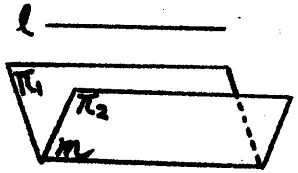
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel \pi_1 \\ a \subset \pi_2 \cap \pi_1 = \ell \end{array}\right\} \rightarrow a \parallel \ell$$

〔T.6〕K1　1平面に平行な直線に、この平面上の1点を通って平行な直線は、全くこの平面に含まれる。



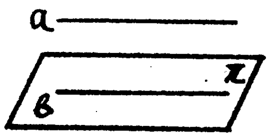
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel \pi \\ P \subset \pi \\ P \subset b \parallel a \end{array}\right\} \to b \subset \pi$$

〔T.6〕K2　同じ直線に平行な2平面の交線は，この直線に平行である。



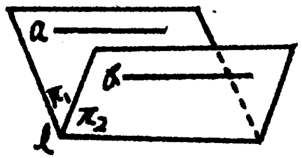
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel l \parallel \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = m \end{array}\right\} \to l \parallel m$$

〔T.7〕　平行な2直線の1方を含み他を含まない平面は，他の直線に平行である。



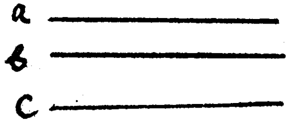
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \pi \not\ni a \end{array}\right\} \to a \parallel \pi$$

〔T.7〕K　平行な2直線の各1つを含む2平面の交線は、この2直線の各に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \supset a \parallel b \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = l \end{array}\right\} \to a \parallel l \parallel b$$

〔T.8〕　同一直線に平行な2直線は、また互に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \to a \parallel c$$

$$(a \parallel b \parallel c \to a \parallel c)$$

§.6 練習問題2

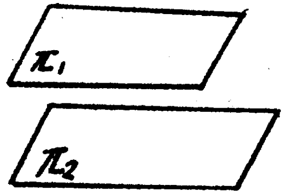
(1) 同一平面上にない4点を結んでできる4辺形（空間4辺形，ゴーシュ4辺形）は幾通りあるか．

(2) 歪4辺形の各辺の中点は，1つの平行4辺形の頂点となる．

(3) 1つの平面が，これと平行な1つの直線を含む2つの平面の各に交われば，その交わりは互に平行である．

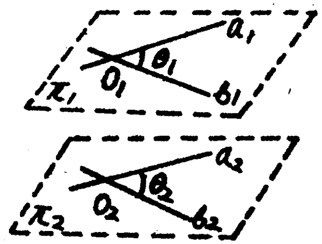
§.7 平面と平面との平行

〔定義〕 2つの平面が共有点をもたないとき，この2平面は互に平行であるという．



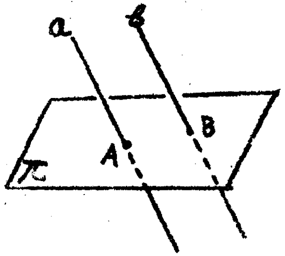
$$\pi_1 \cap \pi_2 = 0 \leftrightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2$$

〔T. 9〕 相交わる2直線が，それぞれ他の相交わる2直線に平行であれば，はじめの2直線の定める平面と，後の2直線の定める平面とは，相合するか又は互に平行である．又，はじめの2直線の夾む角は，後の2直線の夾む角に等しい．



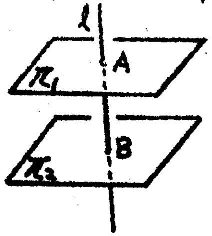
$$\left.\begin{aligned} & a_1 /\!/ a_2 \\ & b_1 /\!/ b_2 \\ & a_1 \cap b_1 = O_1 \\ & a_2 \cap b_2 = O_2 \\ & \pi_1 = \{a_1, b_1\} \\ & \pi_2 = \{a_2, b_2\} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{gathered} \pi_1 /\!/ \pi_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \end{gathered}$$

[T.10]　平行な2直線の1つに交わる平面は，他の直線にも交わる。



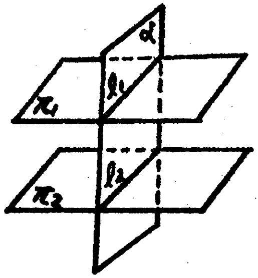
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \cap \pi (=A) \end{array}\right\} \to b \cap \pi (=B)$$

[T.11]　平行な2平面の1つに交わる直線は，他の平面にも交わる。



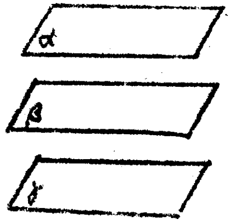
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ l \cap \pi_1 (=A) \end{array}\right\} \to l \cap \pi_2 (=B)$$

[T.11]K1　平行な2平面の1つに交わる平面は，他の平面にも交わる。



$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ \alpha \cap \pi_1 (=l_1) \end{array}\right\} \to \alpha \cap \pi_2 (=l_2)$$

[T.11]K2　同一平面に平行な2つの平面は，また互に平行である。

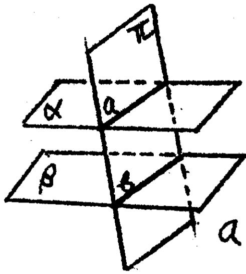


$$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \to \alpha \parallel \gamma$$

又は

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \beta \parallel \gamma \end{array}\right\} \to \alpha \parallel \gamma$$

[T.12]　1つの平面が，平行な2平面と交わるとき，その交線もまた互に平行である。



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a = \alpha \cap \pi \cap \beta = b \end{array}\right\} \to a \parallel b$$

§.8 練習問題3

(1) 2つの平行直線が，2つの平行平面で切りとられる線分の長さは相等しい．

(2) 同一平面上にない2直線があるとき，その1つを含んで他に平行な平面は，唯一存在である．

(3) 同一平面上にない2直線の1つを含んで他に平行な2つの平面は，また互に平行である。

(4) 空間4辺形ABCDの1双の対辺AB, CDを，それぞれP, Qで

$$AP : PB = DQ : QC$$

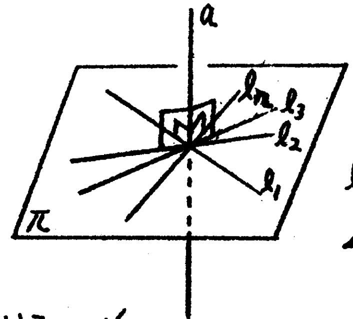
なるように内分（又は外分）し，2点P, Qを通る任意の平面が，BC, ADと交わる点をそれぞれR, Sとすれば，

$$AS : SD = BR : RC$$

である．

§.9 平面の垂線

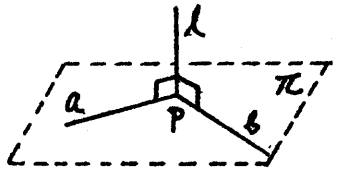
〔定義〕 平面上の1点を通り，かつその点を通るこの平面上のすべての直線と直角をなすような直線を，この平面の垂線という。又，この平面と直線とは互に垂直であるという。



$$\left.\begin{array}{l} l_1, l_2, \cdots l_n \subset \pi \\ \angle a, l_n = 90^\circ \\ {\scriptstyle n=1,2,3,\cdots\infty} \end{array}\right\} \to a \perp \pi$$

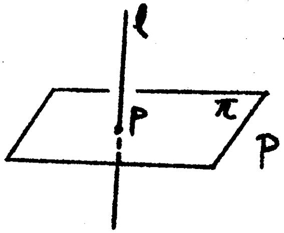
〔註〕 $a \not\perp \pi$ とき aをπの斜線という．
(直線)∩(平面)＝足 と呼ぶ

〔T.13〕 2直線の交点を通り，その各に垂直な直線は，はじめの2直線が定める平面に垂直である。



$$\left.\begin{array}{l} l \supset (a \cap b = P) \\ a \perp l \perp b \\ \pi = \{a, b\} \end{array}\right\} \to l \perp \pi$$

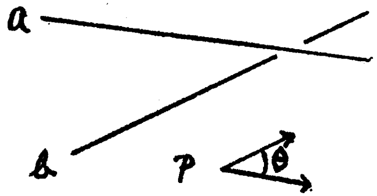
[T.14]　1直線上の1点を通って，この直線に垂直な平面は，唯一存在である。



$$\left.\begin{array}{l} P\subset l \\ P\subset \pi \perp l \end{array}\right\} \longrightarrow \exists_1 \pi$$

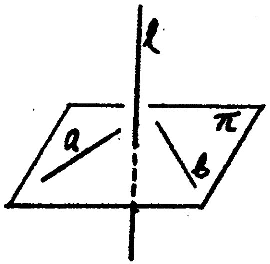
§10　直線と直線との間の角

[定義] 同一直線上にない2直線のなす角とは，任意の1点を通って，この2直線に平行な直線のなす角である。もしこの角が直角ならば，与えられた2直線は互に直角であるという。



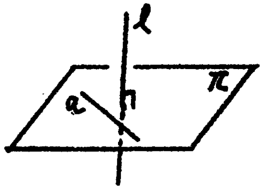
$$\angle a, b = \theta$$

[T.15] 1つの平面上の平行でない2直線の各に垂直な直線は，この平面に垂直である



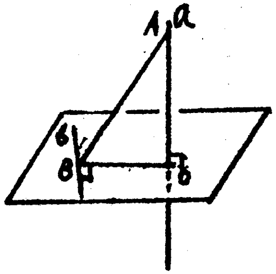
$$\left.\begin{array}{l} (a \nparallel b) \subset \pi \\ a \perp l \perp b \end{array}\right\} \rightarrow l \perp \pi$$

[T.15] K　平面の垂線は，その平面上のすべての直線に垂直である．



$$\left.\begin{array}{l}\ell \perp \pi \\ \forall a \subset \pi\end{array}\right\} \rightarrow \ell \perp a$$

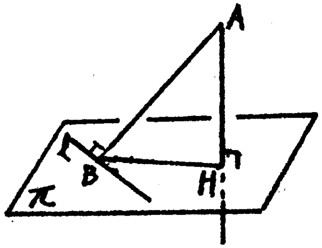
[T.16]　平面上の1つの垂線の足から，この平面に含まれる直線に引いた垂線の足を，最初の垂線上の任意の1点に結ぶ直線は，その直線に垂直である．(三垂線の定理)



$$\left.\begin{array}{l}a \perp \pi (=0) \\ b \subset \pi \\ OB \perp b\end{array}\right\} \rightarrow AB \perp b$$

[註]　[T.16]　[T.16]K1，[T.16]K2　この3つの定理は画法幾何学の理論的な構成に重要な役割をはたしている。

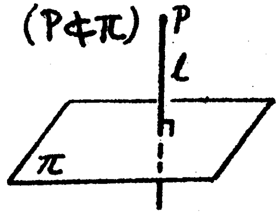
[T.16] K1　平面外の1点から，この平面と平面上の1つの直線に垂線を引けば，その2つの足を通る直線は，最初の直線に垂直である．



$$\left.\begin{array}{l}A \not\subset \pi \\ \ell \subset \pi \\ AH \perp \pi \\ AB \perp \ell\end{array}\right\} \rightarrow HB \perp \ell$$

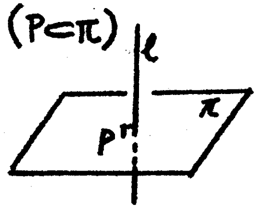
[T.16]K2　1つの点を通り，1つの平面に垂直な直線は，唯一存在である．

$(P \not\subset \pi)$



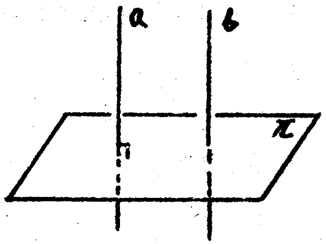
$P \subset \ell \perp \pi \rightarrow \exists_1 \ell$

$(P \subset \pi)$



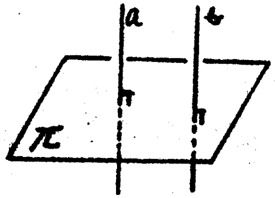
$P \subset \ell \perp \pi \rightarrow \exists_1 \ell$

〔T.17〕 平行な2直線の1つに垂直な平面は，他にも垂直である。



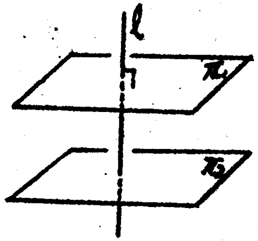
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \perp \pi \end{array}\right\} \rightarrow b \perp \pi$$

〔T.17〕K 同一平面に垂直な2直線は，互に平行である。



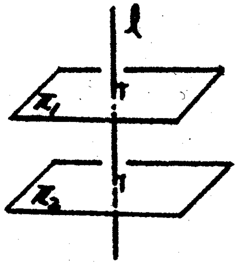
$$a \perp \pi \perp b \rightarrow a \parallel b$$

〔T.18〕 平行な2つの平面の1つに垂直な直線は，他にも垂直である。



$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ l \perp \pi_1 \end{array}\right\} \rightarrow l \perp \pi_2$$

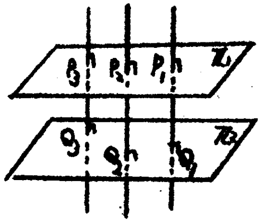
〔T.18〕K 同一直線に垂直な2つの平面は，互に平行である。



$$\pi_1 \perp l \perp \pi_2 \rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

§.11　2平行平面間の距離

〔定義〕平行な2つの平面に垂直な直線が，この2つの平面で切りとられる線分の長さを，この2平行平面間の距離という。



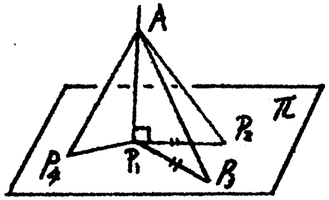
$P_1Q_1 = P_2Q_2 = \cdots = P_nQ_n = \mathrm{Const}$

$\pi_1 \parallel \pi_2$ の間の距離

〔T.19〕　平面外の1点と，この平面上の点とを結ぶすべての線分のうち．

(1) 垂線の長さが最小である．

(2) 2つの斜線のうちでは，その足が垂線の足から等距離にあるものは相等しく，距離の大きな方は距離の小さな方よりも大である．



$AP_1 \perp \pi \to AP_1 < AP_2, AP_3 \cdots$

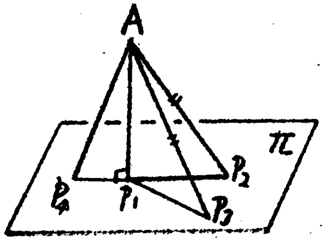
$P_1P_2 = P_1P_3 \to AP_2 = AP_3$

$P_1P_2 < P_1P_4 \to AP_2 < AP_4$

〔T.19〕K　平面外の1点と，この平面上のすべての点を結ぶ線分のうち

(1) 線分の長さが最小であれば垂線である．

(2) 2つの斜線のうちで，その線分の長さが相等しければ，斜辺の足は，垂線の足から等距離にある。もし線分の長さが相等しくなければ，斜辺の足は垂線の足から，線分の長さの大なる方が長さの小なる方よりも大きい距離にある．



$AP_1 < AP_2, AP_3, AP_4, \cdots \to AP_1 \perp \pi$

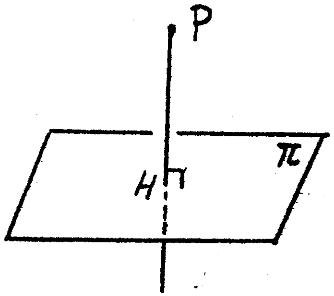
$AP_2 = AP_3 \longrightarrow P_1P_2 = P_1P_3$

$AP_4 < AP_3 \longrightarrow P_1P_4 < P_1P_3$

〔註〕〔T.19〕K　は　〔T.19〕の逆定理である．

§12　点と平面との間の距離

〔定義〕 1つの点から，その平面に引いた垂線の長さを，この点と平面との間の距離という。



PH：点Pと平面πとの間の距離

（問）　点と平面との間の距離を上述のように定義できる理由は何か。

§13　練習問題4

(1)　2つの平行な平面間の距離は，この2平面で切りとられるどんな線分よりも小さい。

(2)　平面の斜線は，その足を通る平面上の3つ以上の直線と直角をなすことはできない。

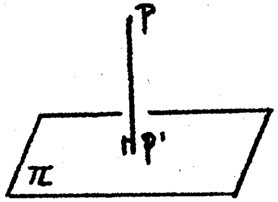
(3)　どの2つも同一平面上にない3直線があるとき，その1つに平行で，他の2つに交わる直線を引け。

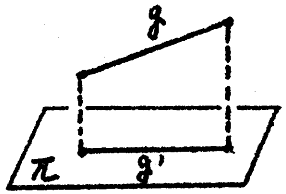
(4)　1点を通って，平行でない2直線のそれぞれに平行な平面を作れ。

§14　正射影

〔定義〕 1点から，1平面に下した垂線の足を，その点のこの平面への正射影という。

1つの図形上のすべての点の1平面に投ずる正射影によってえられる図形を，前の図形のこの平面に投ずる正射影という。





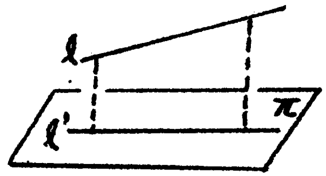
P'：Pのπへの正射影　g'：gのπへの正射影

〔註〕1 <u>正射影</u>のことを単に<u>射影</u>ともいう。

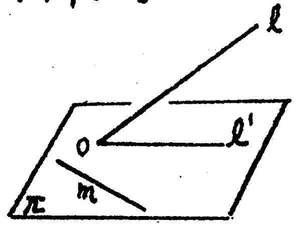
〔註〕2 このようなπ平面を，<u>投影平面</u>ともいう。

〔記号〕 $P'=S_\pi(P)$ ：Pのπへの正射影がP'.
$g'=S_\pi(g)$ ：gのπへの正射影がg'.

〔T.20〕 平面に垂直でない直線のこの平面に投ずる正射影は，1つの直線である。



〔T.21〕 1つの平面の斜線が，その平面上に投ずる正射影とのなす角は，この斜線がこの平面上にある任意の直線とのなす角より大きくはない。



$$\left.\begin{array}{l} \ell\cap\pi\,(=O) \\ \ell'=S_\pi(\ell) \\ \forall m\subset\pi \end{array}\right\} \rightarrow \angle\ell\ell' \leqq \angle\ell m$$

$A'=S_\pi(A)$

〔定義〕 <u>直線と平面とのなす角</u>

$\ell'=S_\pi(\ell) \longrightarrow \angle\ell,\pi=\angle\ell,\ell'$

$\ell\perp\pi \longrightarrow \angle\ell,\pi=90^\circ$

§15 練習問題 5

(1) 平面と角θをなす長さaの線分の，この平面への正射影の長さは

$$a\cos\theta$$

である．

(2) 三角形の１つの平面への正射影の三角形の重心は，もとの三角形の重心である．

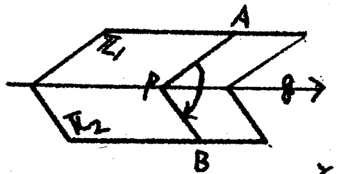
(3) 同一平面上にない２直線と交わり，１つの与えられた平面に垂直な直線を引け。

(4) 同一平面上にない２直線の各に交わりその両方にも垂直な直線は，唯一存在である。

§16 ２面角の平面角

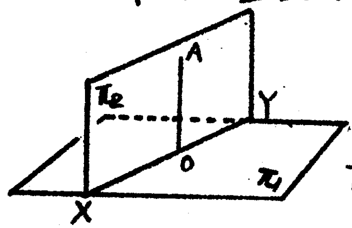
〔定義〕 共有の１直線で限られた２つの平面は，２面角をなすという。

２面角の稜上の１点を通り，各面上で稜に垂直な２つの半直線のなす角を，この２面角の平面角という．２面角が直角をなすとき，直２面角という。



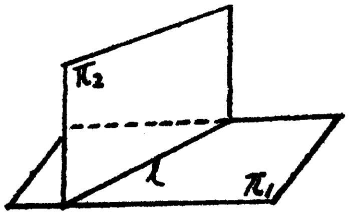
gの向きを与えてπ_1をπ_2に重ねる向きに右廻りのねじを廻したとき，ねじがgの向きに進むならば，２面角$\pi_1 g \pi_2$を正の２面角という．反対の場合は負の２面角という．

〔T.22〕 １つの平面の垂線を含む平面は，この平面に垂直である．



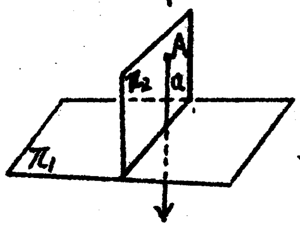
$\pi_1 \perp AO \subset \pi_2 \rightarrow \pi_1 \perp \pi_2$

[T.22] K　1つの平面上の1つの直線を含み，この平面に垂直な平面は，唯一存在である。



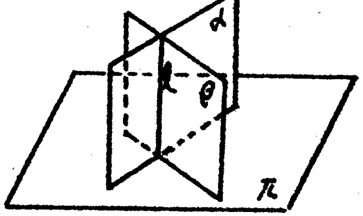
$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \supset l \subset \pi_2 \\ \pi_1 \perp \pi_2\end{array}\right\} \rightarrow \exists_1 \pi_2$

[T.23]　垂直な2平面の1つの上の任意の1点から，他に下した垂線は，はじめの平面に含まれる。



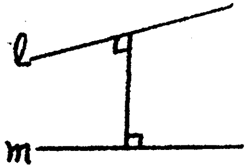
$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \perp \pi_2 \\ \pi_2 \supset A \subset a \perp \pi_1\end{array}\right\} \rightarrow a \subset \pi_2$

[T.24]　相交わる2平面が，ともに第3の平面に垂直ならば，はじめの2平面の交線も第3の平面に垂直である



$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = l \\ \alpha \perp \pi \perp \beta\end{array}\right\} \rightarrow l \perp \pi$

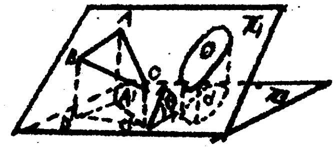
[T.25]　平行でない2直線が与えられたとき，それらと同時に直角に交わる直線が，1本そしてただ1本存在する。



$l \nparallel m \rightarrow \exists_1 \overline{PQ}$

[註] PQ：与えられた2直線 l m の共通垂線

[T.26]　1つの平面上の領域の，他の平面上への正射影の面積は，もとの領域の面積に，これらの2平面のなす角の余弦をかけたものに等しい．



$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC,\ 円O \subset \pi_1 \\ \triangle A'B'C' = S_{\pi_2}(\triangle ABC) \\ 円O' = S_{\pi_2}(円O)\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}S_{\triangle'} = S_{\triangle}\cdot\cos\theta \\ S_{O'} \quad S_O\cdot\cos\theta\end{array}\right.$

§.17　練習問題 6

(1) 射影についての次の3つの命題を証明せよ．

(イ) 1直線の，平行2平面への射影は平行である．

(ロ) 1線分の2平行平面への射影は相等しい

(ハ) 同一図形の，平行2平面への射影は合同である

(2) 共点な3直線の各が，他の2直線に垂直ならば，これらの直線を2つあて含む3平面は，互に垂直である。

(3) 3つの平面の各が，他の2つに垂直ならば，それらの交線の各は，いずれも他に垂直である．

§18 画法幾何学の生い立ち。

文芸復興期

Renaissance のITALYでは、造形美術がすばらしく発達しました。当時、

土木、建築などの技術家の要求から ----

---- 実用的な幾何学が、

遠近法に関心もった画家たちの要求から

------ 透視図法が、

Leonardo da Vinci (1442—1519) などの研究から ------- 射影幾何学が始まった。

ところが Renaissance の代数学は、ただ記号を整備しただけだった。でもFRANCEの Descartes(1595~1650)の時になって、

代数学の記号化をすゝめて ---- 近世代数学

代数学の方法を幾何学に ---- 解析幾何学

が創始された。

17世期

近世数学の黄金時代を、

イギリスの Newton (1642—1727) と、

ドイツ の Leibniz, (1646~1717) とによる

微分積分学の発見によって迎えた!!

代数学

18世期

近世数学は、微分積分学を中心に、

Lagrange, (1736~1813),

Legendre, (1752~1833),

d'Alembert, (1717~1783),

Euler, (1707~1783), などの手によって、さらに前進をつづけた。

微分積分学 {
- 微分幾何学, Euler と Monge, (1746~1818) それから Gauss, (1777~1855)
- 微分方程式論; Riccati, (1676~1754), Condorcet, (1743~1794), によって力学へ、

17世期

射影幾何学の前身として、

Desargues, (1593~1661),

Pascal, (1623~1662), などの手で、

発展してきたが、当時の人々はあまり注目しなかった!!

幾何学

18世期

Renaissance 実用的な幾何学は、Monge、の手によって、新しい実用幾何学として、再び登場!!

Monge, は École Normale Supérieure での 1795 年の講義を Géometrie descriptive (画

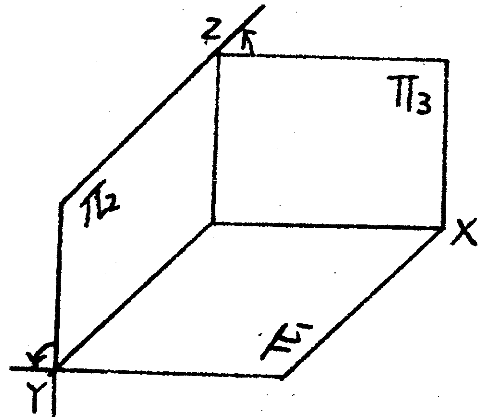
法幾何学）と題して出版しました!!

★Cajoriの初等数学史の中で　小倉金之助先生は，次のように述べていられる。

ガスパール・モンジュの天才によって創造された画法幾何学は綜合幾何学の前線に立って，その進歩に対する大道をひらいてくれた。
すなわち築城の設計に関して，長い算数計算の実行を避けるために，この才幹ある技師モンジュが，幾何学的方法をもって代用しようとしたことから，"科学の1分科としての画法幾何学"が生れてきた。
モンジュは1793年にパリの高等師範学校が開校の当時，4か月間ばかりその教授となったが，のちには新設の高等工芸学校に関係することになった。その後ナポレオンに従ってエジプトの遠征に赴いた。モンジュの門人中には，デュパン，セルヴォア，ブリアンション，アシェット，ビオー，ポンスレーがある.

§.19　舞台装置

空間の図形を，1平面上に表現することを目指す画法幾何学のためには，次の舞台装置が必要である.

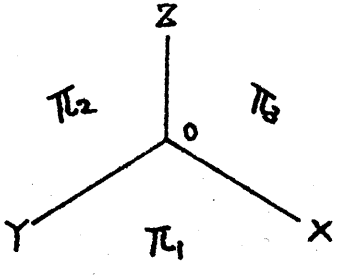


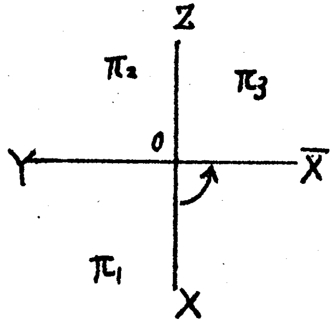
π_1, π_2, π_3 を投影面という。

π_1；平画面，π_2；立画面　π_3；側画面

§.20. 直角投影法

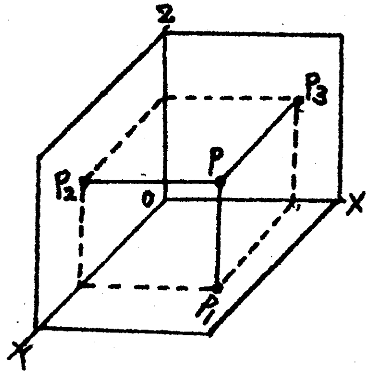
〔定義〕 2つづつ互に直角に交わる3つの平面 π_1, π_2, π_3 上に投ずる正射影で図形をあらわす方法を直角投影法という。

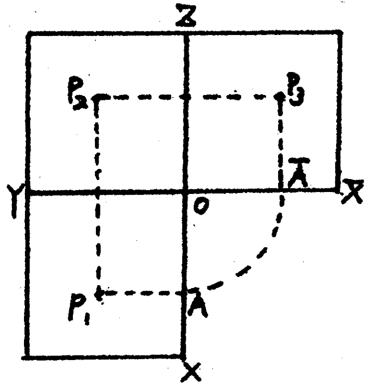




左図を，OX で切り開いて右図のようにする。　OY：基線という
左図を見取図　右図を投影図と呼ぶことにする。

§.21 点の表わし方.





P 点の π_1, π_2, π_3 への投影（正射影）を P_1, P_2, P_3 とする。

1点 P は，見取図では，

$$P_1 = S_{\pi_1}(P),\ P_2 = S_{\pi_2}(P),\ P_3 = S_{\pi_3}(P)$$

すなわち，

$$PP_1 \perp \pi_1,\quad PP_2 \perp \pi_2,\quad PP_3 \perp \pi_3$$

〔T.27〕 1点Pの直角投影は，

$$P_1P_2 \perp OY,\ P_2P_3 \perp OZ,\ OA = O\overline{A}$$

である。（上図参照）

$$P \longrightarrow \begin{cases} P_1P_2 \perp OY \\ P_2P_3 \perp OZ \\ OA = O\overline{A} \end{cases}$$

[T.28] 直角投影において，

$P_1P_2 \perp OY$, $P_2P_3 \perp OZ$, $OA = O\bar{A}$

であれば，1点Pが定まる．

$$\left.\begin{array}{l} P_1P_2 \perp OY, \\ P_2P_3 \perp OZ, \\ OA = O\bar{A} \end{array}\right\} \longrightarrow P$$

[T.29] 直角投影において，1点Pの投影として，P_1P_2が与えられたらP_3，A，$\bar{A}$は定まる。

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = S_{\pi_1}(P) \\ P_2 = S_{\pi_2}(P) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P_3 = S_{\pi_3}(P) \\ A,\ \bar{A} \end{array}\right.$$

[註]$_1$ [T.27] [T.28] から

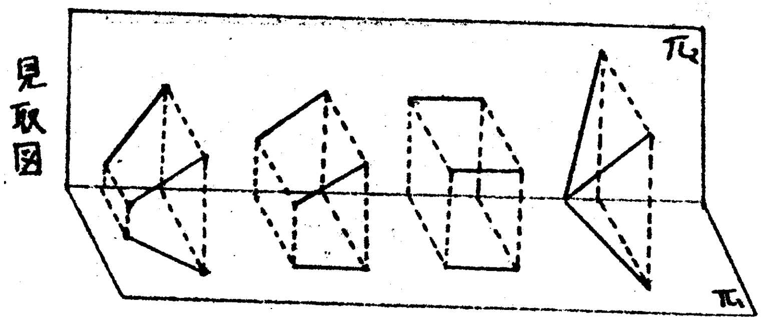
π_1 π_2 π_3上に各1点P_1, P_2, P_3が与えられるとき，P_1 P_2 P_3が1点Pを表わすための必要かつ十分条件は，

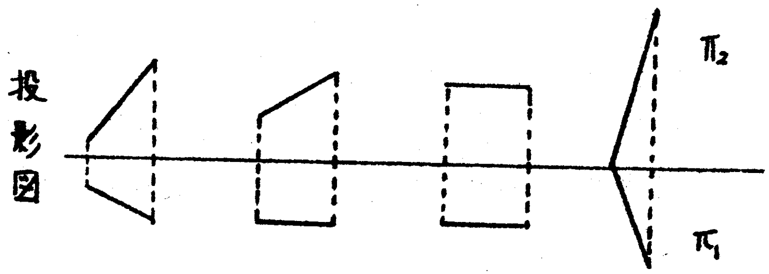
$P_1P_2 \perp OY$, $P_2P_3 \perp OZ$, $OA = O\bar{A}$

である．

[註]$_2$ [T29] から，側面図は省略されることがある．

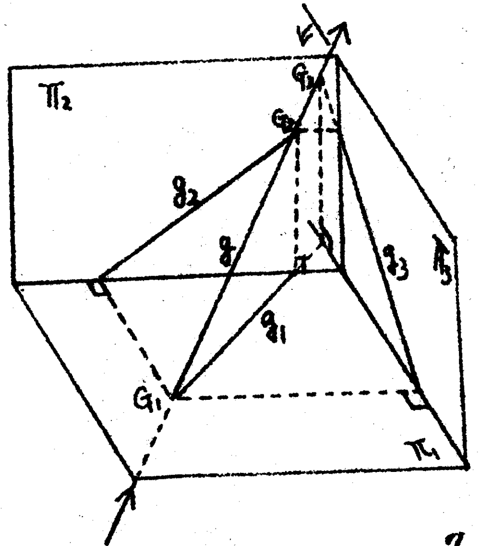
§22 直線の表わし方





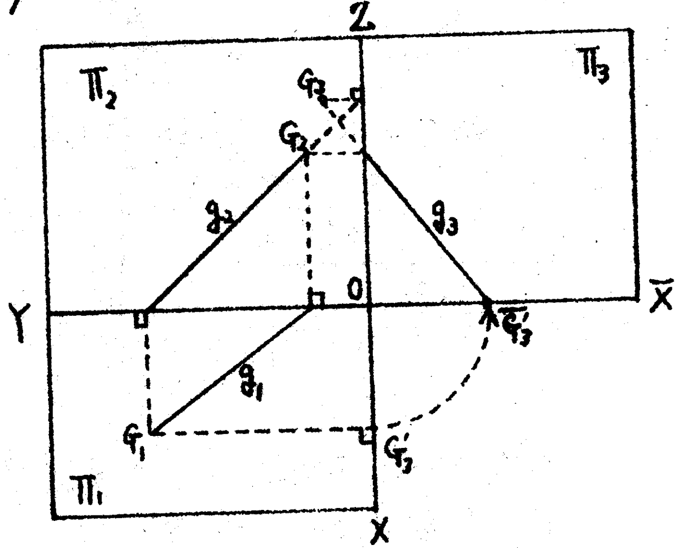
上の図は線分の投影図とそれに対応する見取図である。この作図の理論的根拠は，点の投影からあきらかである。ところが，直線の投影図法は，線分の場合の応用と考えるよりも，直線とπ_1，π_2，π_3，との交点(跡)を考えると面白い。

[定義] 直線の水平跡，直立跡．側跡。



G_1 ; 水平跡
G_2 ; 直立跡
G_3 ; 側　跡

$G_1 = g \cap \pi_1$
$G_2 = g \cap \pi_2$
$G_3 = g \cap \pi_3$



[T.30] 1直線gのG_1, G_2が与えられるとg_1, g_2, g_3およびG_3が定まる。

$$G_1 = \pi_1 \cap g \cap \pi_2 = G_2 \longrightarrow \exists_1 (g_1, g_2, g_2, G_3)$$

(T.31) 1直線gのg_1, g_2が与えられると、g_3およびG_1, G_2, G_3が定まる。

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = S_{\pi_1}(g) \\ g_2 = S_{\pi_2}(g) \end{array}\right\} \longrightarrow \exists_1 (g_3, G_1, G_2, G_3)$$

[T.32] g_1 g_2 g_3が与えられて、1直線gの存在するための必要かつ十分な条件は

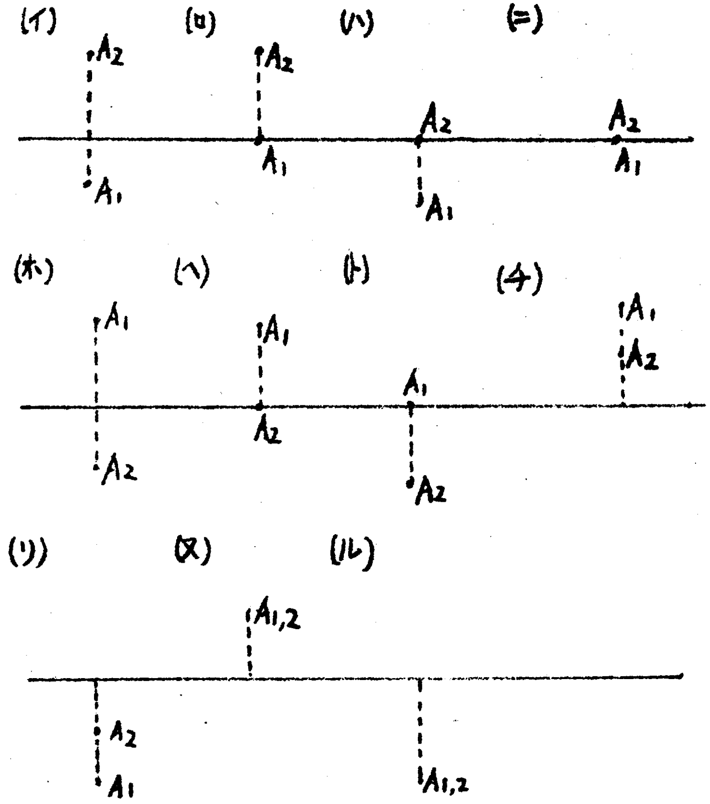
$$OG_3' = O\bar{G}_3$$

である。

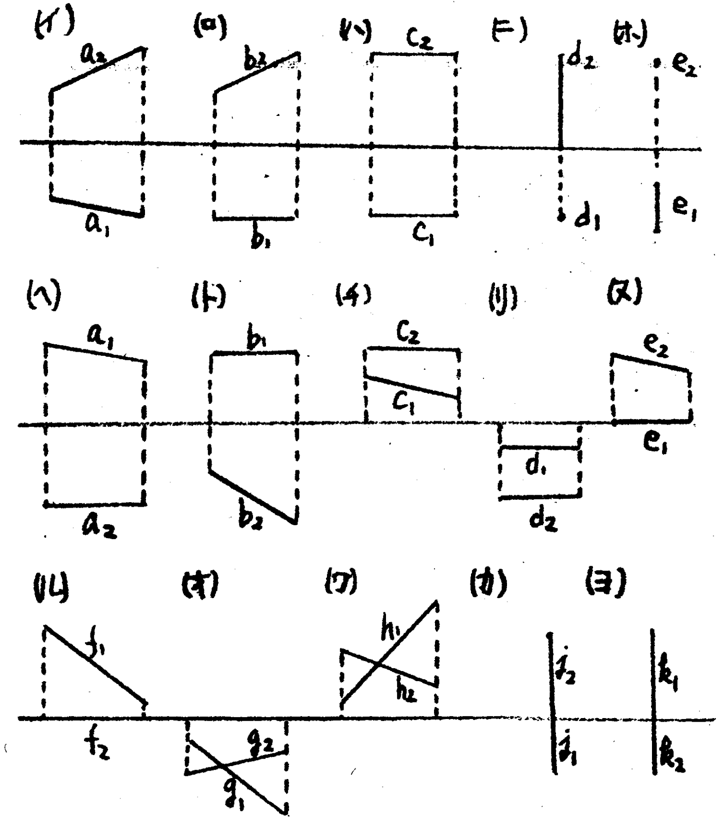
$$\exists g \equiv \left\{\begin{array}{l} g_1 = S_{\pi_1}(g) \\ g_2 = S_{\pi_2}(g) \\ g_3 = S_{\pi_3}(g) \end{array}\right\} \longleftrightarrow OG_3' = O\bar{G}_3$$

§23 練習問題 7

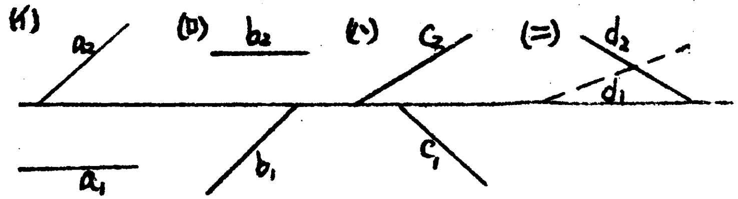
(1) 下の図で与えられた点の投影図から，見取図を作りなさい。（側面図も考えて）



(2) 次に与えられた線分の投影図から，見取図を作りなさい。（側面図も考えて）

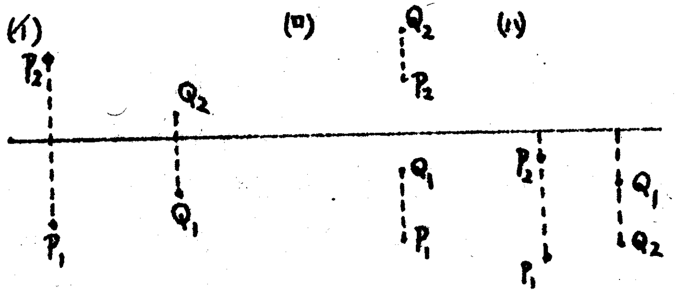


(3) 下の図で与えられた直線の投影図を完成し，見取図も作りなさい。



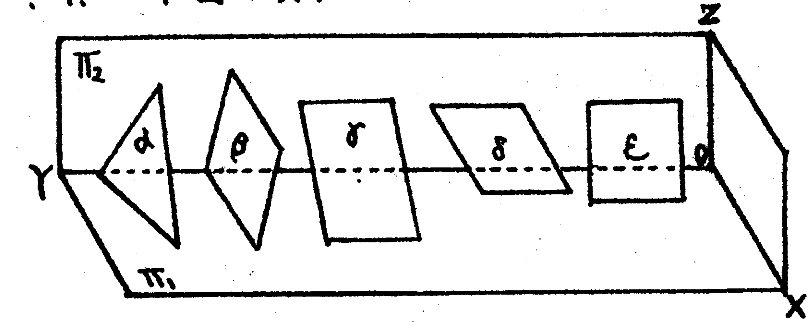
(4) 前問で与えられた直線の投影図の他の場合を(1),(2)を参考にして、問題の形で示しなさい。—(自分で問題を作ってみることは大変理解を深めるものです。)

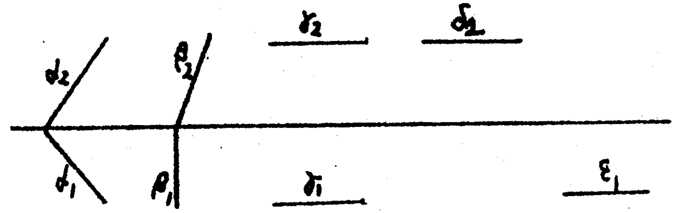
(5) 2点P(P_1,P_2), Q(Q_1,Q_2)を通る直線gの跡を求めなさい。



(6) 2直線a(a_1,a_2), b(b_1,b_2)の交わる条件を求めなさい。

§24. 平面の表わし方.





平面は、π_1,π_2,π_3との跡で表わせる!!

$\alpha \cap \pi_1 = \alpha_1$: αの水平跡

$\alpha \cap \pi_2 = \alpha_2$: αの直立跡

$\beta \cap \pi_1 = \beta_1$: βの水平跡

$\beta \cap \pi_2 = \beta_2$: βの直立跡

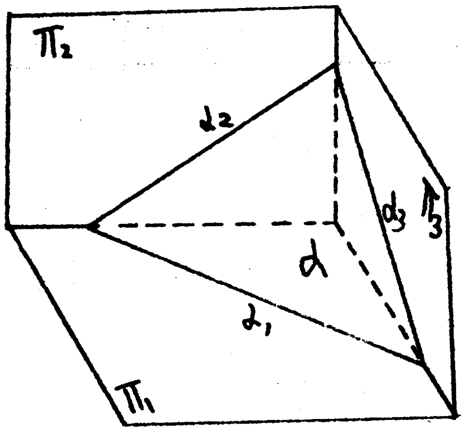
$\gamma \cap \pi_1 = \gamma_1$: γの水平跡

$\gamma \cap \pi_2 = \gamma_2$: γの直立跡

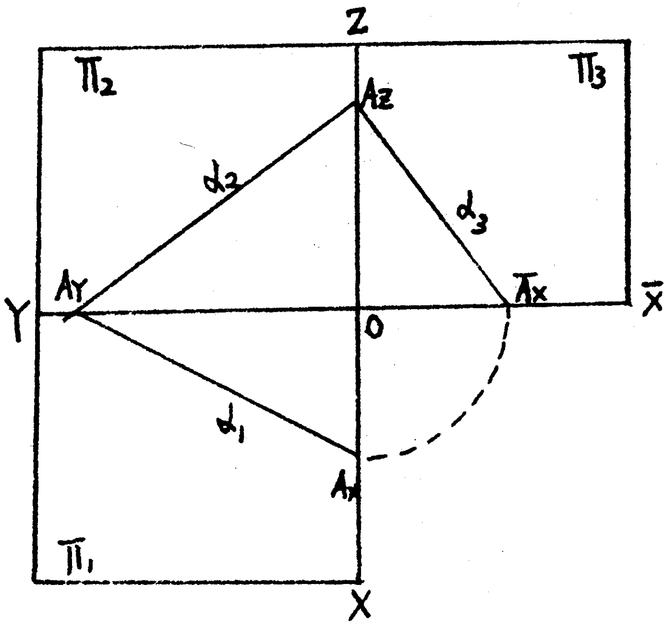
$\delta \cap \pi_1 = \delta_1$: δの水平跡

$\delta \cap \pi_2 = \delta_2$: δの直立跡

・・・・



α_1： 水平跡
α_2： 直立跡
α_3： 側　跡



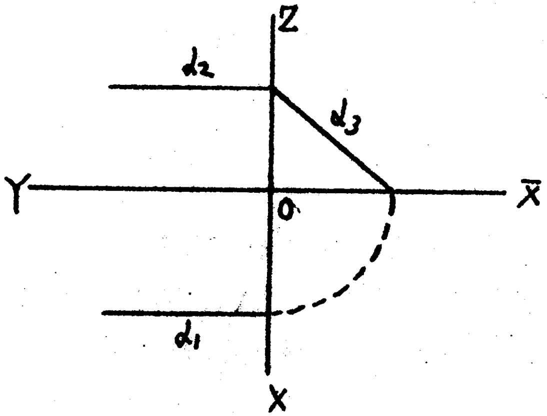
[T.33] いずれの軸にも平行でない１つの平面αのα_1, α_2が与えられると，α_3が定まり，α_1とα_2との交点は軸OY上に，α_2とα_3との交点は軸OZ上に存在する．

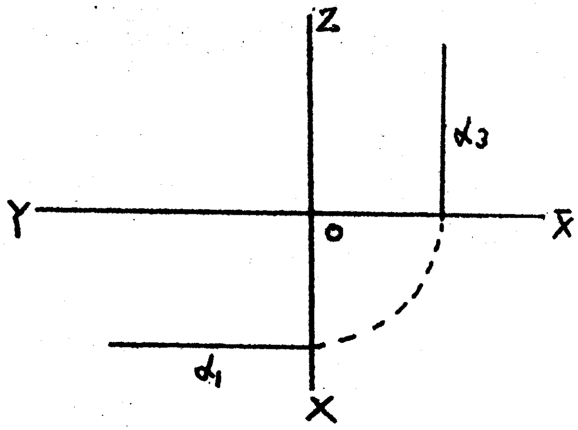
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \Pi_1 \cap \alpha \\ \alpha_2 = \Pi_2 \cap \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \cap \alpha_2 = A_Y \subset OY \\ \alpha_2 \cap \alpha_3 = A_Z \subset OZ \\ OA_X = O\bar{A}_X \end{array}\right.$$

[T.34] $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$が，いずれの軸にも平行でない平面$\alpha$を表わすための必要かつ十分条件は，$\alpha_1$，$\alpha_2$がOY上で交わり，$\alpha_2$，$\alpha_3$がOZ上で交わり，かつ$OA_X = O\bar{A}_X$である．

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \Pi_1 = \alpha_1 \\ \alpha \cap \Pi_2 = \alpha_2 \\ \alpha \cap \Pi_3 = \alpha_3 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \cap \alpha_2 = A_Y \subset OY \\ \alpha_2 \cap \alpha_3 = A_Z \subset OZ \\ OA_X = O\bar{A}_X \end{array}\right.$$

〔T.35〕 1つの平面αが軸OYに平行であれば、α_1とα_2とは共に軸OYに平行である．とくにαがπ_2に平行であればα_2は存在せず，α_1は軸OYに，α_3はOZに平行である．

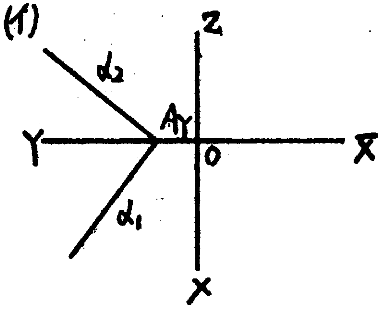




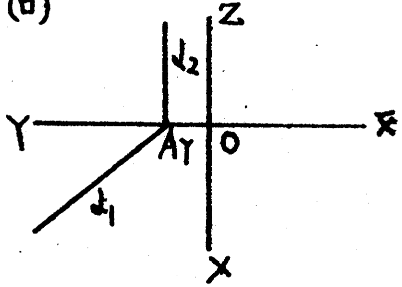
§25. 練習問題 8

(1) 次の図で与えられた平面αの側跡α_3を求めなさい。見取図も作りなさい。

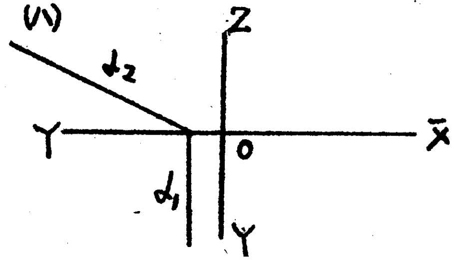
(イ)



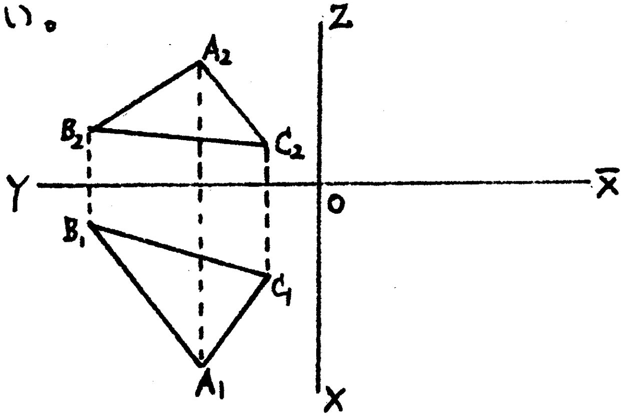
(ロ)



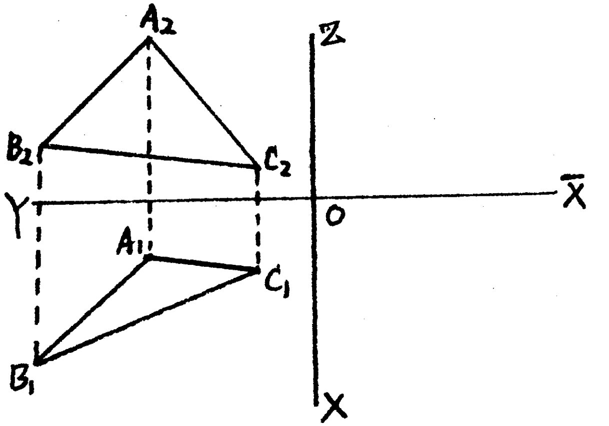
(ハ)



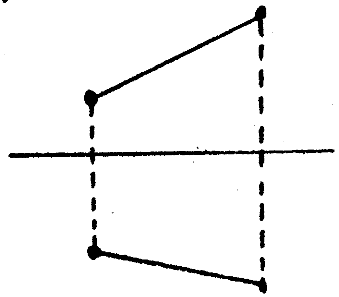
(2) 三角形ＡＢＣの側面図を作図しなさい。



(3) 三角形ＡＢＣ　の重心を求めなさい。

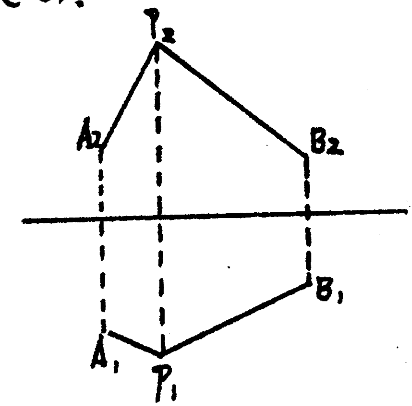


(4) 与えられた線分ＡＢの実長と傾角を作図しなさい。

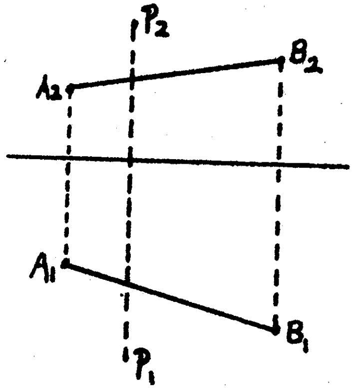


(5) 空間の２直線の相対的位置を，見取図と投影図であらわしなさい。〔相交わる，平行，捩れの位置.〕

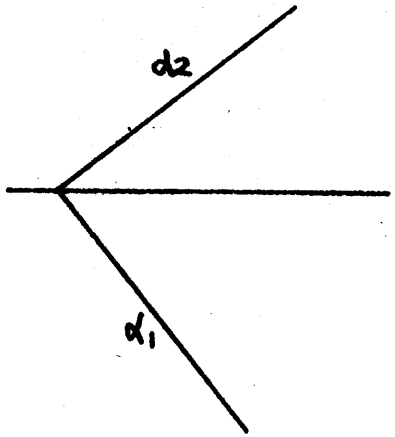
(6) ２つの相交わる直線の交角を作図しなさい。



(7) 与えられた点から，与えられた線分への垂線を作図しなさい。

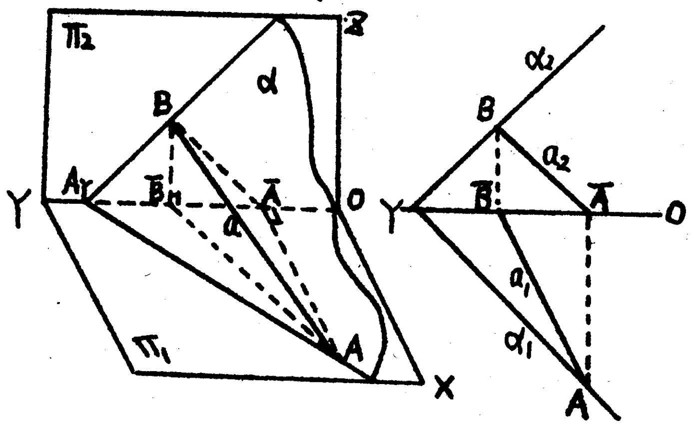


(8) 与えられた平面と，水平面および直立面とのなす角を作図しなさい。



§26 平面上の点と直線の表わし方.

1° 平面上の直線 NO1.

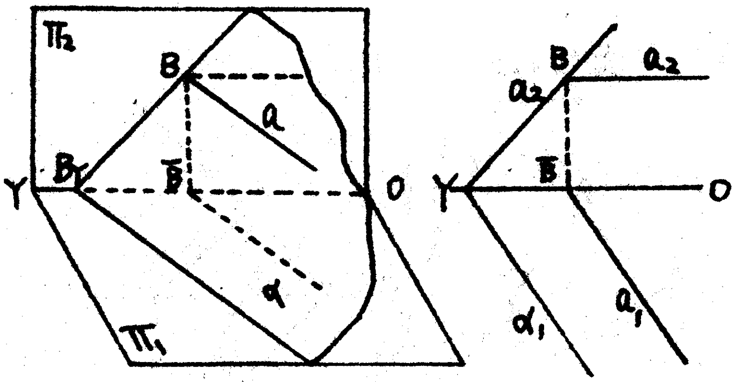


[T.35] 直線 a が平面 α 上にあつて，π_1, π_2 のいずれにも平行でなければ，a の水平跡は α_1 上に，直立跡は α_2 上にある。逆も成りたつ。

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ \pi_1 \not\parallel a \not\parallel \pi_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \cap \pi_1 = A \subset \alpha_1 \\ a \cap \pi_2 = B \subset \alpha_2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \not\parallel a \not\parallel \pi_2 \\ a \cap \pi_1 = A \subset \alpha_1 \\ a \cap \pi_2 = B \subset \alpha_2 \end{array}\right\} \longrightarrow a \subset \alpha$$

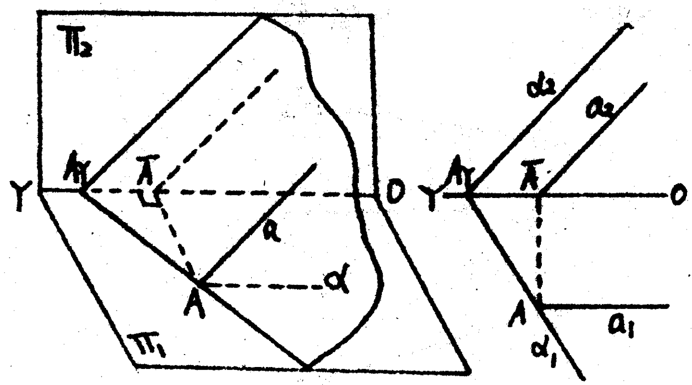
2° 平面上の直線 NO.2



[T.36]　直線aが平面α上にあって，π_1と平行でπ_2と平行でなければ，a_1はα_1に平行で，a_2はOYに平行で直立跡はα_2上にある。逆も成りたつ。

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ \pi_1 /\!/ a \cap \pi_2 = B \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 /\!/ \alpha_1 \\ a_2 /\!/ OY \\ B \subset \alpha_2 \end{array}\right.$$

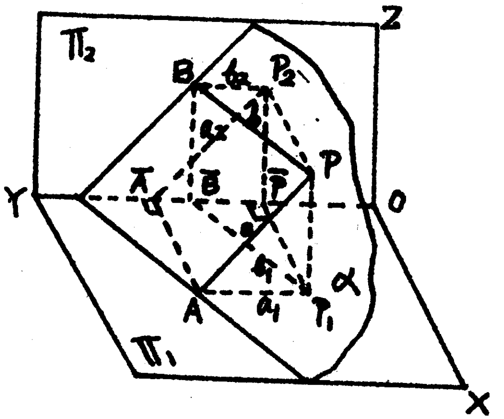
3° 平面上の直線 NO.3



[T.37]　直線aが平面α上にあって，π_2と平行でπ_1と平行でなければ，a_2はα_2に平行で，a_1はOYに平行で直立跡はα_1上にある．逆も成りたつ．

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ \pi_2 /\!/ a \cap \pi_1 = A \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 /\!/ \alpha_2 \\ a_1 /\!/ OY \\ A \subset \alpha_1 \end{array}\right.$$

4° 平面上の点



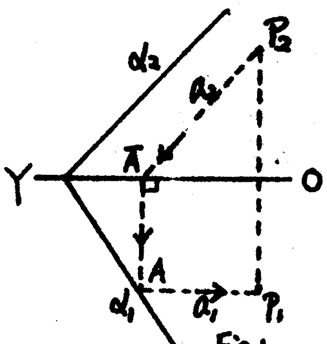


Fig 1

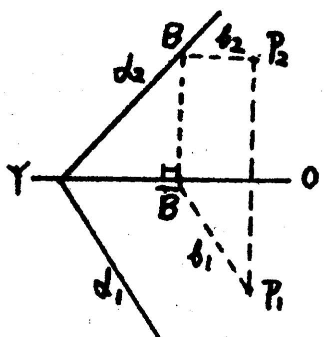


Fig.2

[T.38] (Fig 1) 点P(P_1,P_2)がα(α_1,α_2)上にあるときは，P_2を通ってα_2に平行な直線が基線OYと交わる点を$\bar{A}$とし，$\bar{A}$において基線に垂直な直線がα_1と交わる点をAとすれば，Aを通って基線に平行な直線はP_1を通る．逆も成りたつ。

at. $P(P_1, P_2) \subset \alpha(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\left.\begin{array}{l} a_2(P_2, \bar{A}) \parallel \alpha_2 \\ \bar{A}A \perp OY \\ a_1(\supset A) \parallel OY \end{array}\right\} \longrightarrow a_1 \supset P_1$$

逆 at $P(P_1, P_2)$, $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\left.\begin{array}{l} a_2(P_2, \bar{A}) \parallel \alpha_2 \\ \bar{A}A \parallel OY \\ a_1(\supset A) \parallel OY \\ a_1 \supset P_1 \end{array}\right\} \longrightarrow P \subset \alpha$$

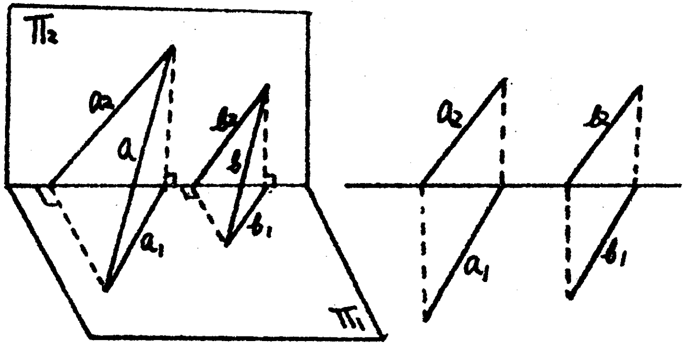
[T.39] (Fig.2) 点P(P_1,P_2)がα(α_1,α_2)上にあるときは，P_1を通ってα_1に平行な直線が基線OYと交わる点を$\bar{B}$とし，$\bar{B}$において基線に垂直な直線がα_2と交わる点をBとすれば，Bを通って基線に平行な直線はP_2を通る。逆も成りたつ.

at $P(P_1, P_2) \subset \alpha(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\left.\begin{array}{l} b_1(P_1, \bar{B}) \parallel \alpha_1 \\ \bar{B}B \parallel OY \\ b_2(\supset B) \parallel OY \end{array}\right\} \longrightarrow b_2 \subset P_2$$

§.27 平行2直線，平行2平面の表わし方

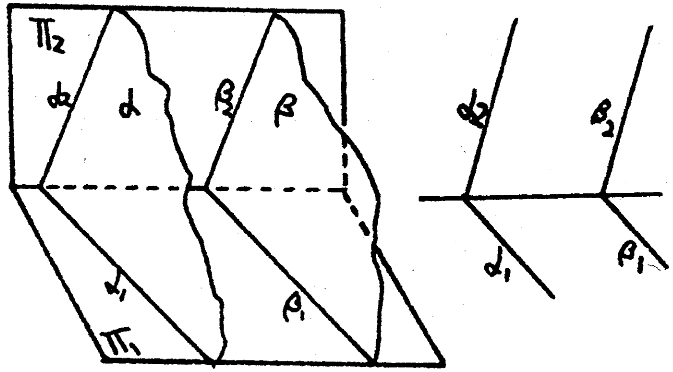
1° 平行2直線：$a \parallel b$



〔T.40〕 2直線$a(a_1, a_2)$，$b(b_1, b_2)$が平行であるための必要かつ十分条件は，$a_1 \parallel b_1$，$a_2 \parallel b_2$である。

$$a(a_1, a_2) \parallel b(b_1, b_2) \longleftrightarrow \begin{cases} a_1 \parallel b_1 \\ a_2 \parallel b_2 \end{cases}$$

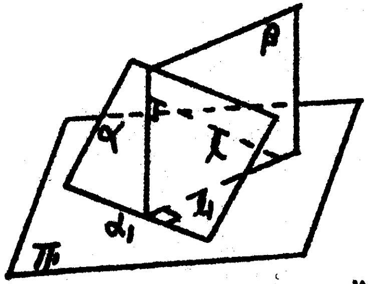
2° 平行2平面；$\alpha \parallel \beta$

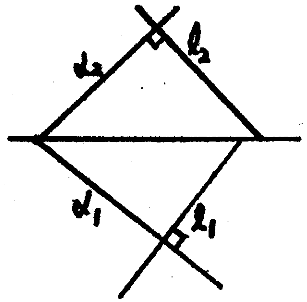


〔T.41〕 2平面$\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$，$\beta(\beta_1, \beta_2)$が平行であるための必要かつ十分条件は，$\alpha_1 \parallel \beta_1$，$\alpha_2 \parallel \beta_2$である。

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) \parallel \beta(\beta_1, \beta_2) \longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \parallel \beta_1 \\ \alpha_2 \parallel \beta_2 \end{cases}$$

§28 平面に垂直な直線の表わし方





※ 見取図は，複雑にならないように瓦だけ.

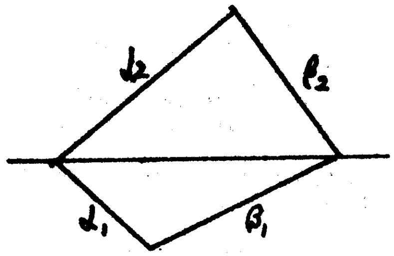
[T.42]　直線l (l_1, l_2) が平面α (α_1, α_2) に垂直であるための必要かつ十分な条件は，　$\alpha_1 \perp l_1$，$\alpha_2 \perp l_2$　である

l (l_1, l_2) と α (α_1, α_2) とにおいて

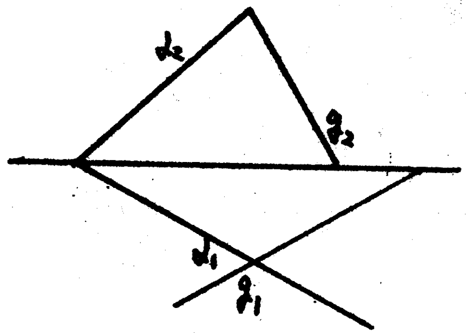
$$l \perp \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 \perp l_1 \\ \alpha_2 \perp l_2 \end{cases}$$

§29 基礎の作図題．

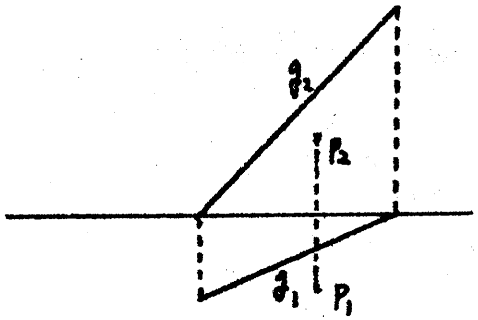
1°　2平面α，βの交線g.



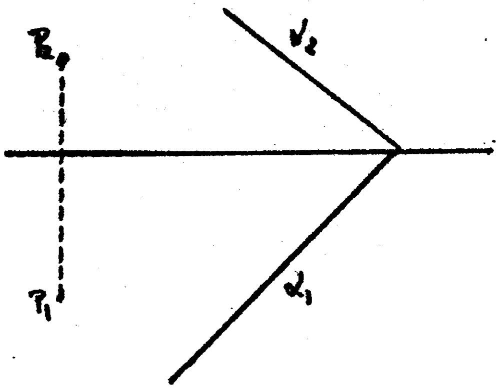
2°　直線gと平面αとの交点P.



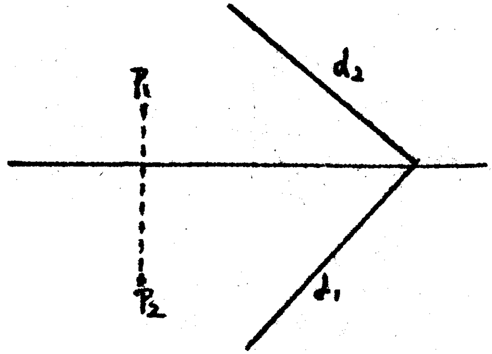
3° 点Pと直線gの定める平面αの作図



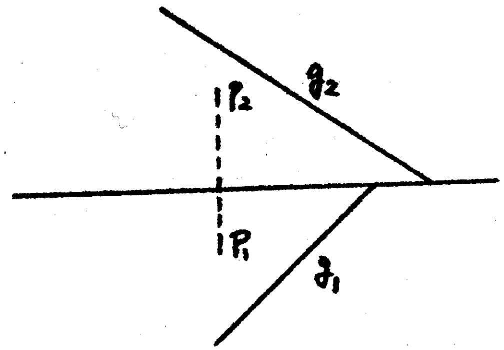
4° 点Pを含み，平面αと平行な平面β
の作図.



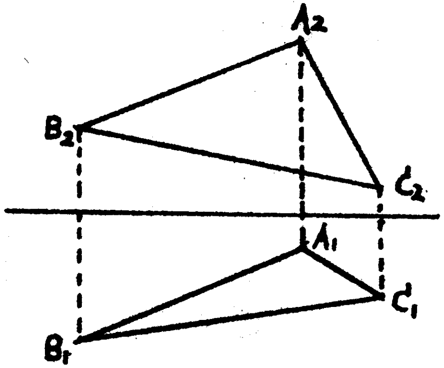
5° 点Pから平面αへの垂線gの作図.



6° 点Pを含み直線gに垂直な平面αの
作図.

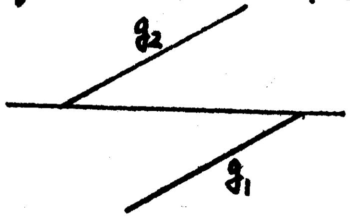


7° $\triangle ABC$ の実形を作図.

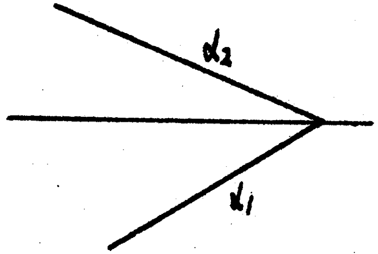


§30 練習問題 9

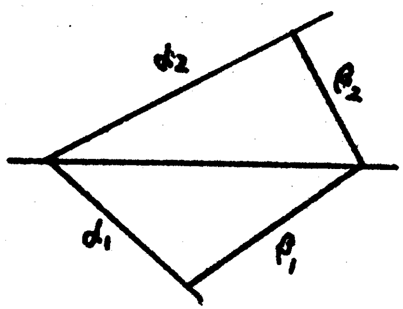
(1) 直線 g と π_1 とのなす角を求めなさい。



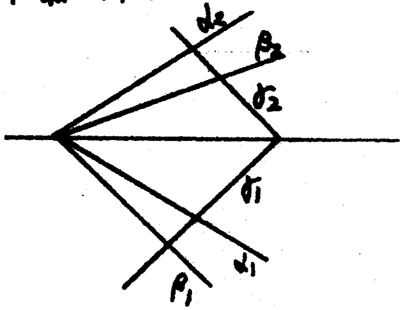
(2) 平面 α と π_1 とのなす角を求めなさい。



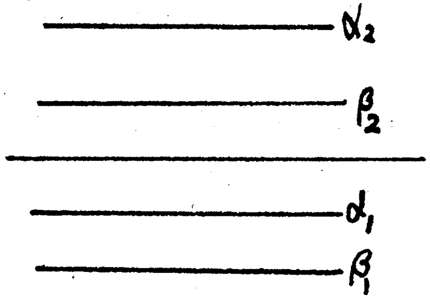
(3) 2平面 α, β の交角を求めなさい。



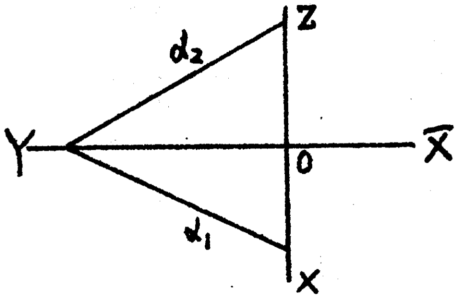
(4) 3平面α, β, γの交点を求めなさい。



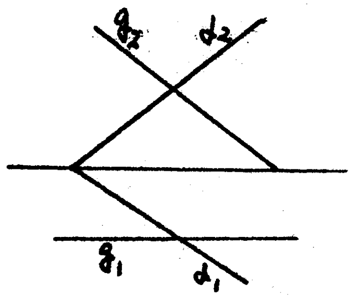
(5) 2平行線a, bの定める平面αを求めなさい。



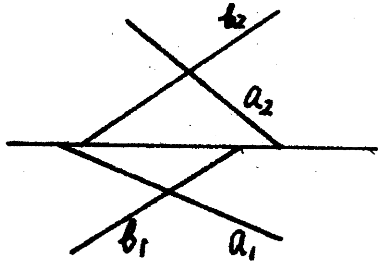
(6) O点からα平面に垂線hを引き，その長さを求めなさい。



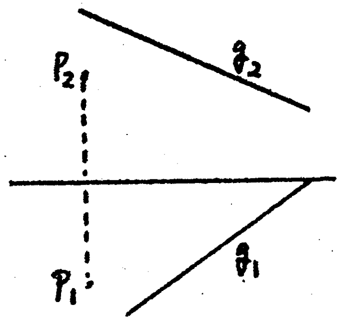
(7) 平面αと直線gとの交角を求めなさい。



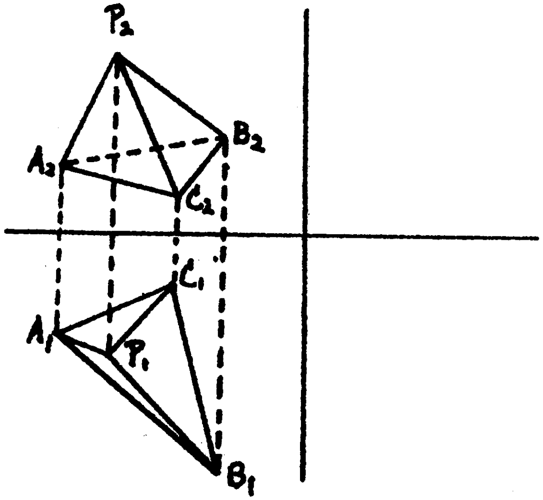
(8) 2直線a, bの共通垂線を求めなさい。



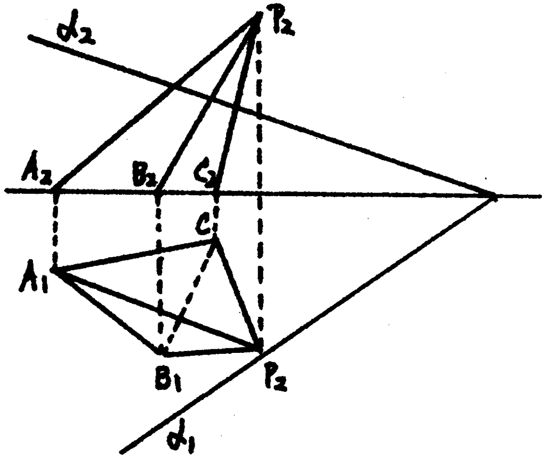
(9) P点から直線gに下した垂線およびその長さを求めなさい。



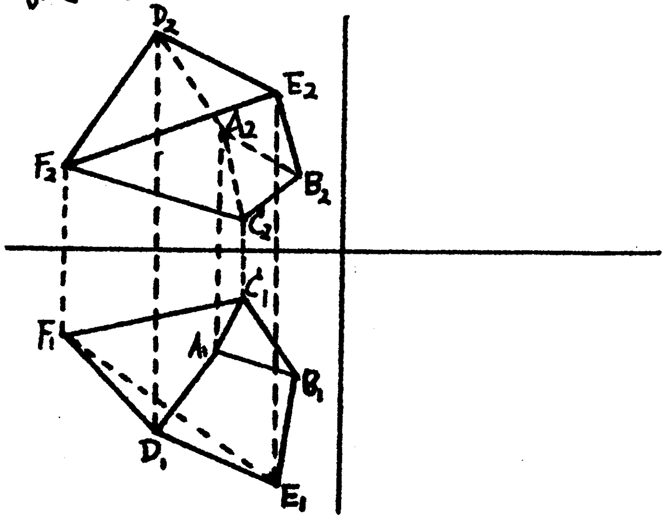
(10) 3角錐P－ABC の側面図を求めなさい。



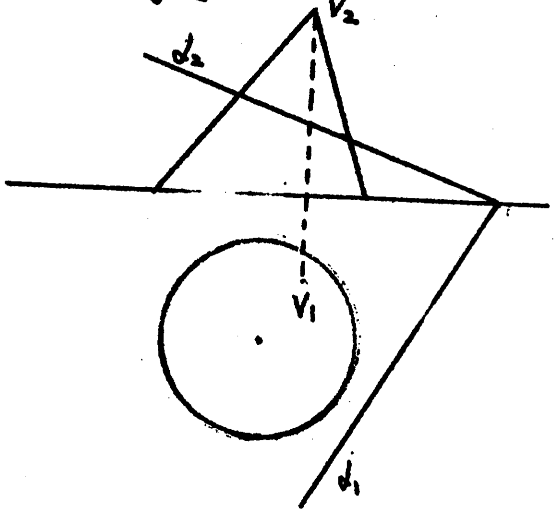
(11) 3角錐P－ABC を平面αで切ったときの切断面を求めなさい。



(12) 角錐台ABC－DEF の側面図を求めなさい。



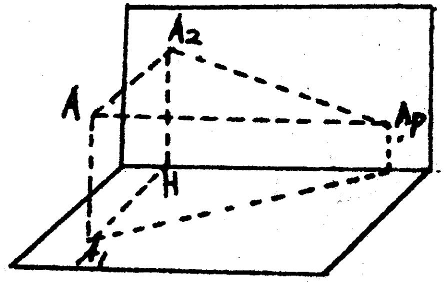
(13) 斜円錐を平面で切ったときの切断面を求めなさい。



§31 斜投影法

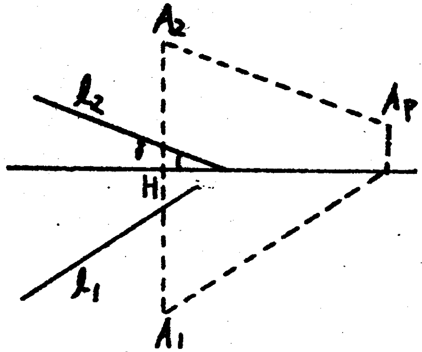
〔定義〕平行投影のうちで直角投影でないものを斜投影又は斜射影という。

〔基礎作図〕1点Aのℓ方向への斜投影を求めること。



(A_1, A_2); Aの直角投影

A_p; Aのℓ方向への斜投影



δ; 傾角
ℓ_2が基線となす角

$$\mu = \frac{A_2A_p}{A\,A_2} = \frac{A_2A_p}{A_1H} \left(= A_2A_p : A\,A_2\right)$$

斜投影の比率という。

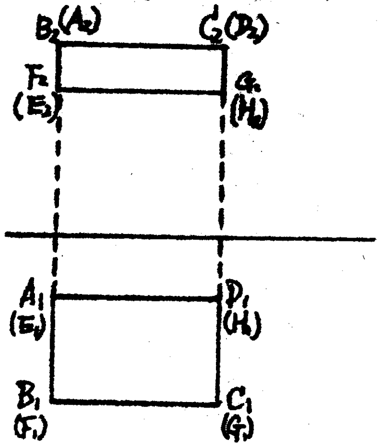
〔性質〕斜投影は δ, μ で定まる。

〔種類〕

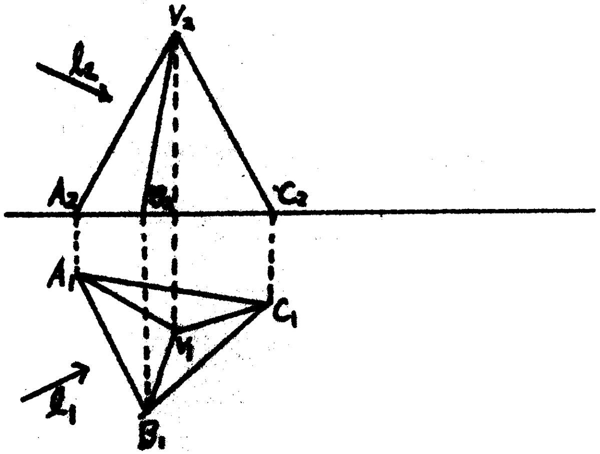
Cavalier Projection
$\delta = 45^\circ,\quad \mu = 1$

Cabinet Projection.
$\delta = 45^\circ \quad \mu = \frac{1}{2}$

〔作業〕1 与えられた直6面体ABCD−EFGHから Cavalier Projection および Cabinet Projection を求めなさい。

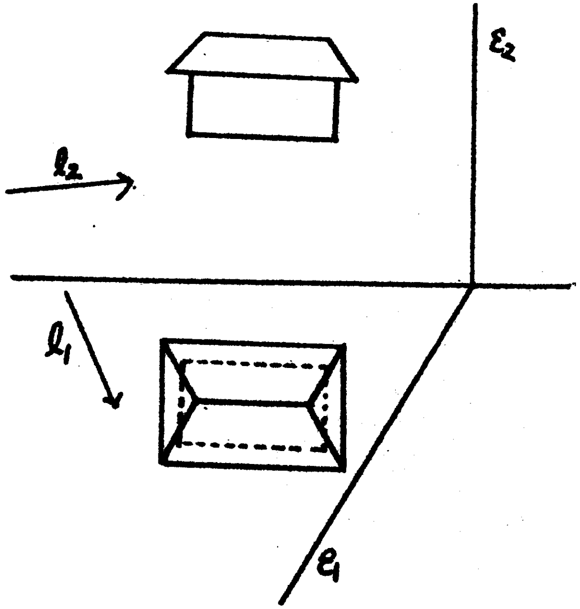


〔作業〕$_2$ ３角錐 V−ABC の ℓ 方向からの平行光線による陰影を求めなさい。



§32 練習問題 10

(1) 下の図の Cavalier Projection を求めなさい。



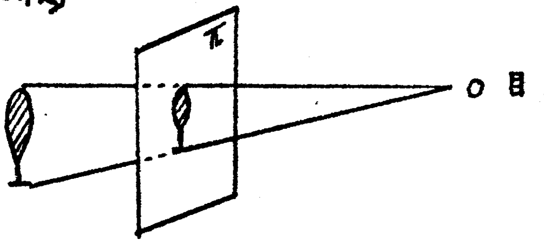
(2) 上の図の Cabinet Projection を求めなさい。

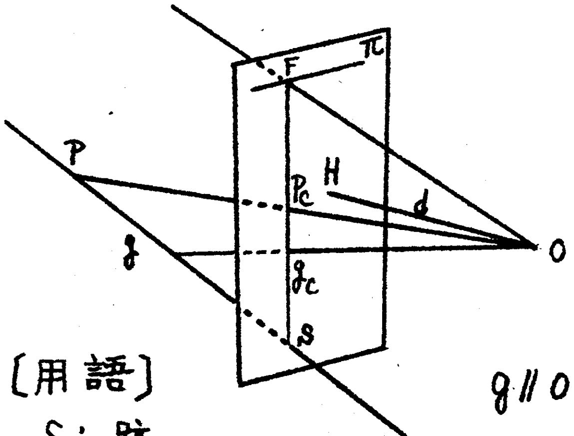
(3) 上の図の $\mu=1$. $\delta=30°$ の斜投影を求めなさい。

(4) 上の図を ℓ 方向に，E平面に斜投影した実形を求めなさい。

§33 中心投影法（透視図法）

［定義］





$g \parallel OF$

［用語］

S：跡

π：鉛直面

F：消点，逃点，Flucht punkt

H：視心　　Haupt punkt

O：視点

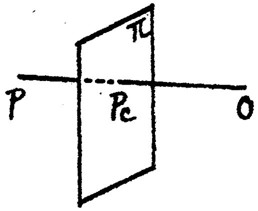
d：距離　　Diotanz.

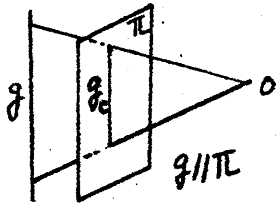
P_c：Pのπ上の像

［基本性質］

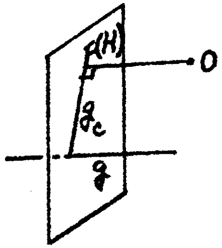
I	点	→	点
II	鉛直線	→	鉛直線
III	$g(\perp\pi)$	→	FH
IV	平行線群	→	Fを通る直線群

［補説］

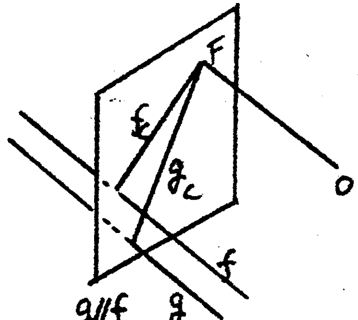




$g \parallel \pi$



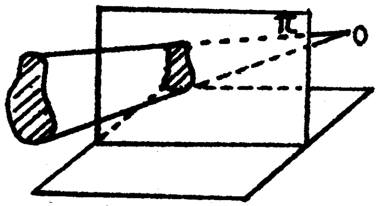
$g \perp \pi$



$g \parallel f$　g

§.34 基礎の作図

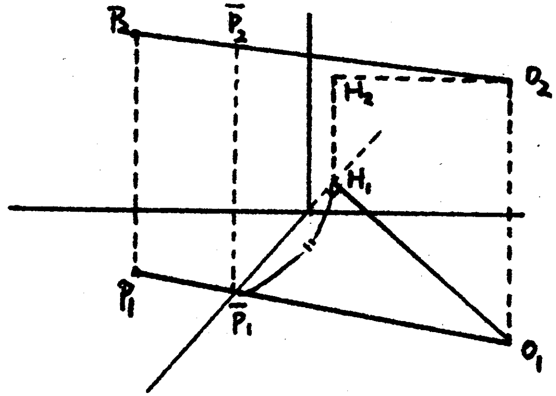
1° 作業；基本性質を画法幾何学的に表現するには，



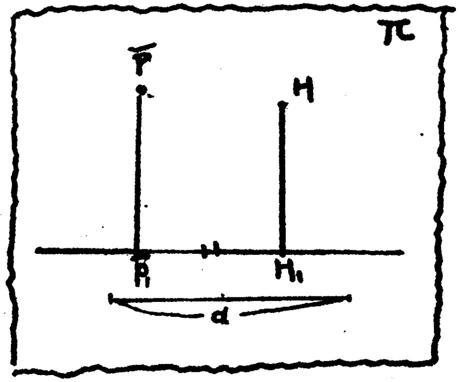
①；直角投影から中心投影へ。

②；透視図を視点Oの側から見ること にする。

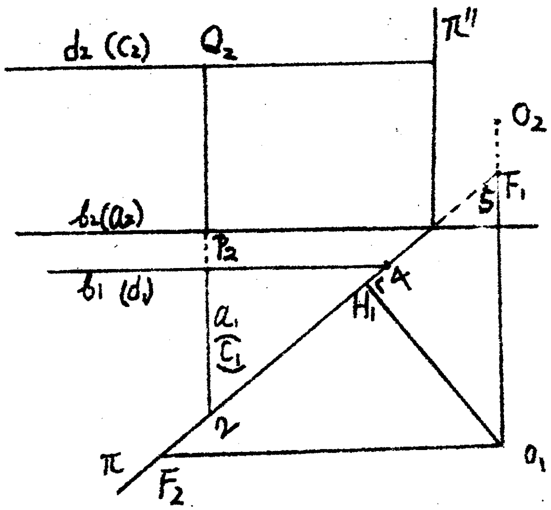
2° 点Pの透視図



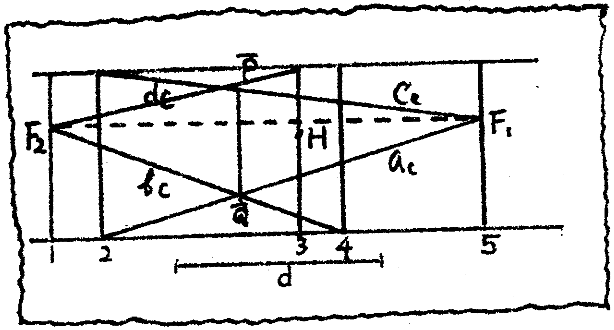
（Pの像$\overline{P}$）



3° 線分PQ（鉛直線）の透視図



（PQの像 $\overline{P}\overline{Q}$）

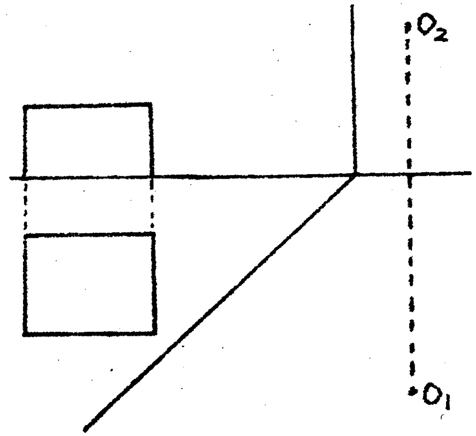


（註）　a, b ; Pを通る. $\pi_1 // a \perp \pi_2$, $\pi_1 // b // \pi_2$

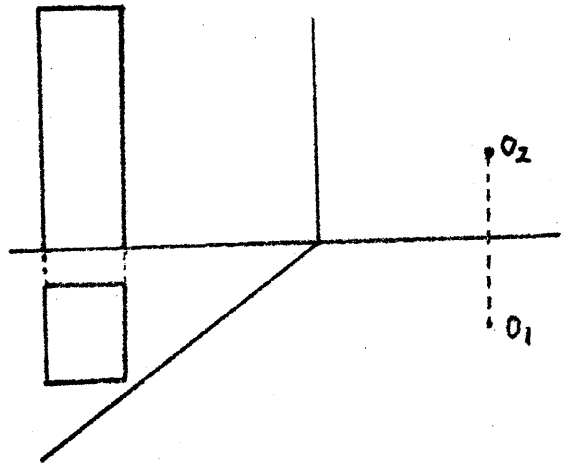
c, d ; Qを通る. $\pi_1 // c \perp \pi_2$, $\pi_1 // d // \pi_2$

§35　練習問題11

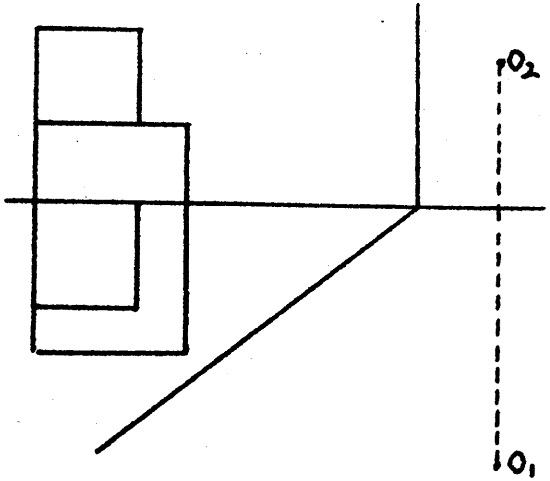
(1)　直方体の透視図を求めなさい。



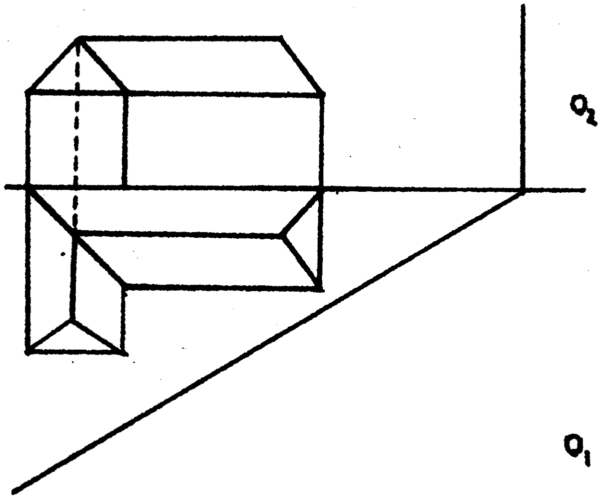
(2)　4角柱の透視図を求めなさい。



(3) 下の図から透視図を求めなさい。



(4) 下の図から透視図を求めなさい。



目　次

§.1. はじめに ------- 1
§.2. 公理群 ------- 2
§.3. 基礎定理 ------ 3
§.4. 練習問題1 ------ 4
§.5. 直線と平面との平行 ------ 4
§.6. 練習問題2 ------ 6
§.7. 平面と平面との平行 ------ 6
§.8 練習問題3 ------ 8
§.9 平面の垂線 ------ 8
§.10. 直線と直線との間の角 ------- 9
§.11. 2平行平面間の距離 ------- 12
§.12. 点と平面との間の距離 ----- 13
§.13. 練習問題4 ------- 13
§.14. 正射影 ------- 14
§.15. 練習問題5 ------- 15
§.16、2面角の平面角 ------ 15
§.17. 練習問題6 ------ 17

§.18 画法幾何学の生い立ち. ----- 16
§.19 舞台装置 ----- 19

§.20. 直角投影法（平行投影法） ------ 20
§.21. 点の表わし方 ------- 20
§.22. 直線の表わし方 -------- 21
§.23. 練習問題7 ------- 23
§.24. 平面の表わし方 ------- 24
§.25. 練習問題8 -------26
§.26. 平面上の点と直線の表わし方 -----28
§.27 平行2直線、平行2平面の表わし方 --- 31
§.28. 平面に垂直な直線の表わし方 ------- 32
§.29. 基礎の作図題 ------- 32
§.30. 練習問題9 ------- 34
§.31 斜投影法 -------37
§.32 練習問題10 ------- 38
§.33 中心投影法（透視図法） -------39
§.34. 基礎の作図 ------- 40
§.35 練習問題11 ------- 41